Filtres et ultrafiltres

Soit E un ensemble non vide.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ est un *filtre* sur E si

- (P_0) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- (P_1) $\forall (X,Y) \in \mathcal{F}^2,\ X \cap Y \in \mathcal{F}$.
- (P_2) $\forall X \in \mathcal{F},\ \forall Y \in \mathcal{P}(E) :\quad X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
- (P_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Première Partie

1. Que dire d'une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifierait (P_2) mais pas (P_3) ? [S]
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
   A quelle condition sur E, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ? [S]
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E alors E appartient à $\mathcal{F}$. [S]
4. Pour toute partie non vide A de E, on note $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. On l'appelle le *filtre principal* engendré par A. [S]
5. On désigne par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des filtres sur E.
   Montrer que l'application φ de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dans $\mathcal{F}(E)$ définie par $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$ est injective. [S]
6. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble infini.
   On note $\mathcal{I}_E$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de E.
   Montrer que $\mathcal{I}_E$ est un filtre sur E. [S]

Deuxième Partie

1. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On suppose que l'un des éléments de $\mathcal{F}$ est une partie *finie* de E.
   L'objectif de cette question est de démontrer que le filtre $\mathcal{F}$ est principal.
   Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}, \exists\, B \in \mathcal{F}, \text{card}(B) = n\}$ est donc non vide.
   Soit n_0 le minimum de l'ensemble $\mathcal{N}$, et soit A un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal n_0.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est le filtre principal engendré par A. [S]
2. (a) En déduire que si E est un ensemble fini, tout filtre sur E est principal. [S]
   (b) Qu'en déduit-on, si E est fini, pour l'application φ définie en I-5 ? [S]
   (c) Quel est le nombre de filtres sur un ensemble à n éléments (avec $n \geq 1$) ?
   Donner quelques exemples de filtres sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. [S]
3. Soit E un ensemble infini. Prouver que $\mathcal{I}_E$ n'est pas un filtre principal. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Troisième Partie

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F},\ X \cap B = Y \cap B$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. [S]
2. Soit A une partie non vide de E. On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.
   Montrer qu'alors : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$. [S]
3. On suppose que E est infini et que $\mathcal{F}$ est le filtre $\mathcal{I}_E$.
   Δ désigne l'opération différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$.
   Montrer que : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X\Delta Y$ est un ensemble fini. [S]

Quatrième Partie

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ de la relation d'ordre "inclusion".

Autrement dit, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur E, on pose $\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

NB : on pourra indifféremment utiliser le symbole $\leq$ ou le symbole $\subset$.

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ de E est un *ultrafiltre* si : $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{F}(E),\ \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

1. Vérifier que pour toutes parties A, B non vides de E : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$. [S]
2. (a) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément minimum ? Si oui lequel ? [S]
   (b) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément maximum ? Si oui lequel ? [S]
3. (a) Soit $\mathcal{F}_A$ le filtre engendré par une partie A non vide de E.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si et seulement si A est un singleton $\{x\}$.
   On dit que les $\mathcal{F}_{\{x\}}$ sont les ultrafiltres *triviaux*. [S]
   (b) Quels sont les ultrafiltres sur E si l'ensemble E est fini ? [S]
4. On rappelle que pour toute partie A de E, $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.
   Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ (A \in \mathcal{F} \text{ ou } \overline{A} \in \mathcal{F})$$
   [S]
5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \text{ ou } B \in \mathcal{F})$$
   [S]
6. (a) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est inclus dans aucun ultrafiltre trivial. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigé du problème

Première Partie

1. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (P_1) mais pas (P_2).
   Puisque l'ensemble vide appartient à $\mathcal{F}$, et puisque toute partie X de E contient $\emptyset$, de l'hypothèse (P_2) il découle que X est élément de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. [Q]
2. $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre sur E car il ne vérifie pas l'hyptohèse (P_3).
   Si E est réduit à un singleton $\{x\}$, alors $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est un filtre sur E.
   Mais si E contient au moins deux éléments distincts x et y, alors les singletons $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$ sont éléments de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, mais pas leur intersection (qui est vide).
   Ainsi $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est un filtre sur E si et seulement si E est un singleton. [Q]
3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Puisque $\mathcal{F} \neq \emptyset$, soit A un élément de $\mathcal{F}$.
   L'inclusion $A \subset E$ et l'hypothèse (P_2) impliquent que E est élément de $\mathcal{F}$. [Q]
4. Tout d'abord $\mathcal{F}_A$ est non vide car l'ensemble A est lui-même un élément de $\mathcal{F}_A$.
   Ensuite, soient X et Y deux éléments de $\mathcal{F}_A$, c'est-à-dire deux parties de E contenant A.
   On a bien sûr $A \subset X \cap Y$, ce qui prouve que $X \cap Y$ appartient à $\mathcal{F}_A$.
   Ensuite, si $X \in \mathcal{F}_A$ et si $Y \subset E$ contient X, on a $A \subset X \subset Y$ donc $Y \in \mathcal{F}_A$.
   Enfin, A étant non vide, l'ensemble vide n'est pas élément de $\mathcal{F}_A$ ($A \not\subset \emptyset$).
   On a établi les propriétés (P_0), (P_1), (P_2), (P_3) : $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. [Q]
5. On se donne deux parties non vides A et B de E telles que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$.
   Il s'agit donc de prouver l'égalité $A = B$.
   On sait que A est toujours élément de $\mathcal{F}_A$. On en déduit ici $A \in \mathcal{F}_B$, c'est-à-dire $B \subset A$.
   Les deux ensembles A et B jouant le même rôle, il en découle $B \subset A$ puis $A = B$. [Q]
6. – Tout d'abord E est élément de $\mathcal{I}_E$, car il est le complémentaire de l'ensemble vide, qui est une partie finie de E. Donc $\mathcal{I}_E$ est non vide : la propriété (P_0) est vérifiée.
   – Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{I}_E$: cela signifie que les complémentaires $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ de X et Y sont des parties finies de E.
   Il en est donc de même de l'ensemble $\overline{X} \cup \overline{Y}$, qui est le complémentaire de $X \cap Y$.
   Ainsi $X \cap Y$ est élément de $\mathcal{I}_E$, ce qui établit la propriété (P_1).
   – Soit X un élément de $\mathcal{I}_E$ et soit Y une partie de E contenant X.
   Le complémentaire $\overline{Y}$ est donc contenu dans celui de X, qui par hypothèse est fini.
   Il en découle que $\overline{Y}$ est fini, donc que Y est dans $\mathcal{I}_E$: cela établit (P_2).
   – Enfin l'ensemble vide n'est pas élément de $\mathcal{I}_E$ car son complémentaire E est infini.
   Cela établit (P_3) et achève de prouver que $\mathcal{I}_E$ est un filtre sur E.
   [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.