Filtres et ultrafiltres

Soit E un ensemble non vide.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ est un *filtre* sur E si

- (P_0) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- (P_1) $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2,\ X \cap Y \in \mathcal{F}$.
- (P_2) $\forall X \in \mathcal{F},\ \forall Y \in \mathcal{P}(E) :\quad X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
- (P_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Première Partie

1. Que dire d'une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifierait (P_2) mais pas (P_3) ? [S]
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
   A quelle condition sur E, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ? [S]
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E alors E appartient à $\mathcal{F}$. [S]
4. Pour toute partie non vide A de E, on note $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. On l'appelle le *filtre principal* engendré par A. [S]
5. On désigne par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des filtres sur E.
   Montrer que l'application φ de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dans $\mathcal{F}(E)$ définie par $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$ est injective. [S]
6. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble infini.
   On note $\mathcal{I}_E$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de E.
   Montrer que $\mathcal{I}_E$ est un filtre sur E. [S]

Deuxième Partie

1. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On suppose que l'un des éléments de $\mathcal{F}$ est une partie *finie* de E.
   L'objectif de cette question est de démontrer que le filtre $\mathcal{F}$ est principal.
   Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}, \exists\, B \in \mathcal{F}, \operatorname{card}(B) = n\}$ est donc non vide.
   Soit n_0 le minimum de l'ensemble $\mathcal{N}$, et soit A un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal n_0.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est le filtre principal engendré par A. [S]
2. (a) En déduire que si E est un ensemble fini, tout filtre sur E est principal. [S]
   (b) Qu'en déduit-on, si E est fini, pour l'application φ définie en I-5 ? [S]
   (c) Quel est le nombre de filtres sur un ensemble à n éléments (avec $n \geq 1$) ?
   Donner quelques exemples de filtres sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. [S]
3. Soit E un ensemble infini. Prouver que $\mathcal{I}_E$ n'est pas un filtre principal. [S]

Troisième Partie

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F},\ X \cap B = Y \cap B$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. [S]
2. Soit A une partie non vide de E. On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.
   Montrer qu'alors : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$. [S]
3. On suppose que E est infini et que $\mathcal{F}$ est le filtre $\mathcal{I}_E$.
   Δ désigne l'opération différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$.
   Montrer que : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X\Delta Y$ est un ensemble fini. [S]

Quatrième Partie

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ de la relation d'ordre “inclusion”.

Autrement dit, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur E, on pose $\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

NB : on pourra indifféremment utiliser le symbole $\leq$ ou le symbole $\subset$.

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ de E est un *ultrafiltre* si : $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{F}(E),\ \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

1. Vérifier que pour toutes parties A, B non vides de E : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$. [S]
2. (a) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément minimum ? Si oui lequel ? [S]
   (b) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément maximum ? Si oui lequel ? [S]
3. (a) Soit $\mathcal{F}_A$ le filtre engendré par une partie A non vide de E.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si et seulement si A est un singleton $\{x\}$.
   On dit que les $\mathcal{F}_{\{x\}}$ sont les ultrafiltres *triviaux*. [S]
   (b) Quels sont les ultrafiltres sur E si l'ensemble E est fini ? [S]
4. On rappelle que pour toute partie A de E, $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.
   Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ (A \in \mathcal{F} \text{ ou } \overline{A} \in \mathcal{F})$$
   [S]
5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \text{ ou } B \in \mathcal{F})$$
   [S]
6. (a) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est inclus dans aucun ultrafiltre trivial. [S]

Corrigé du problème

Première Partie

1. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (P_1) mais pas (P_2).
   Puisque l'ensemble vide appartient à $\mathcal{F}$, et puisque toute partie X de E contient $\emptyset$, de l'hypothèse (P_2) il découle que X est élément de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. [Q]
2. $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre sur E car il ne vérifie pas l'hyptohèse (P_3).
   Si E est réduit à un singleton $\{x\}$, alors $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est un filtre sur E.
   Mais si E contient au moins deux éléments distincts x et y, alors les singletons $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$ sont éléments de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, mais pas leur intersection (qui est vide).
   Ainsi $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est un filtre sur E si et seulement si E est un singleton. [Q]
3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Puisque $\mathcal{F} \neq \emptyset$, soit A un élément de $\mathcal{F}$.
   L'inclusion $A \subset E$ et l'hypothèse (P_2) impliquent que E est élément de $\mathcal{F}$. [Q]
4. Tout d'abord $\mathcal{F}_A$ est non vide car l'ensemble A est lui-même un élément de $\mathcal{F}_A$.
   Ensuite, soient X et Y deux éléments de $\mathcal{F}_A$, c'est-à-dire deux parties de E contenant A.
   On a bien sûr $A \subset X \cap Y$, ce qui prouve que $X \cap Y$ appartient à $\mathcal{F}_A$.
   Ensuite, si $X \in \mathcal{F}_A$ et si $Y \subset E$ contient X, on a $A \subset X \subset Y$ donc $Y \in \mathcal{F}_A$.
   Enfin, A étant non vide, l'ensemble vide n'est pas élément de $\mathcal{F}_A$ $(A \not\subset \emptyset)$.
   On a établi les propriétés (P_0), (P_1), (P_2), (P_3) : $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. [Q]
5. On se donne deux parties non vides A et B de E telles que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$.
   Il s'agit donc de prouver l'égalité $A = B$.
   On sait que A est toujours élément de $\mathcal{F}_A$. On en déduit ici $A \in \mathcal{F}_B$, c'est-à-dire $B \subset A$.
   Les deux ensembles A et B jouant le même rôle, il en découle $B \subset A$ puis $A = B$. [Q]
6. – Tout d'abord E est élément de $\mathcal{I}_E$, car il est le complémentaire de l'ensemble vide, qui est une partie finie de E. Donc $\mathcal{I}_E$ est non vide : la propriété (P_0) est vérifiée.
   – Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{I}_E$: cela signifie que les complémentaires $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ de X et Y sont des parties finies de E.
   Il en est donc de même de l'ensemble $\overline{X} \cup \overline{Y}$, qui est le complémentaire de $X \cap Y$.
   Ainsi $X \cap Y$ est élément de $\mathcal{I}_E$, ce qui établit la propriété (P_1).
   – Soit X un élément de $\mathcal{I}_E$ et soit Y une partie de E contenant X.
   Le complémentaire $\overline{Y}$ est donc contenu dans celui de X, qui par hypothèse est fini.
   Il en découle que $\overline{Y}$ est fini, donc que Y est dans $\mathcal{I}_E$: cela établit (P_2).
   – Enfin l'ensemble vide n'est pas élément de $\mathcal{I}_E$ car son complémentaire E est infini.
   Cela établit (P_3) et achève de prouver que $\mathcal{I}_E$ est un filtre sur E.
   [Q]