

Filtres et ultrafiltres

Soit E un ensemble non vide.

On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{F} de $\mathcal{P}(E)$ est un *filtre* sur E si

- (P_0) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- (P_1) $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2, X \cap Y \in \mathcal{F}$.
- (P_2) $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{P}(E) : X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
- (P_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Première Partie

1. Que dire d'une famille \mathcal{F} de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifierait (P_2) mais pas (P_3) ? [S]
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
A quelle condition sur E , l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ? [S]
3. Montrer que si \mathcal{F} est un filtre sur E alors E appartient à \mathcal{F} . [S]
4. Pour toute partie non vide A de E , on note $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$.
Montrer que \mathcal{F}_A est un filtre sur E . On l'appelle le *filtre principal* engendré par A . [S]
5. On désigne par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des filtres sur E .
Montrer que l'application φ de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dans $\mathcal{F}(E)$ définie par $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$ est injective. [S]
6. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble infini.
On note \mathcal{I}_E l'ensemble des complémentaires des parties finies de E .
Montrer que \mathcal{I}_E est un filtre sur E . [S]

Deuxième Partie

1. Soit \mathcal{F} un filtre sur E . On suppose que l'un des éléments de \mathcal{F} est une partie *finie* de E .
L'objectif de cette question est de démontrer que le filtre \mathcal{F} est principal.
Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}, \exists B \in \mathcal{F}, \text{card}(B) = n\}$ est donc non vide.
Soit n_0 le minimum de l'ensemble \mathcal{N} , et soit A un élément de \mathcal{F} de cardinal n_0 .
Montrer que \mathcal{F} est le filtre principal engendré par A . [S]
2. (a) En déduire que si E est un ensemble fini, tout filtre sur E est principal. [S]
(b) Qu'en déduit-on, si E est fini, pour l'application φ définie en I-5? [S]
(c) Quel est le nombre de filtres sur un ensemble à n éléments (avec $n \geq 1$)?
Donner quelques exemples de filtres sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. [S]
3. Soit E un ensemble infini. Prouver que \mathcal{I}_E n'est pas un filtre principal. [S]

Troisième Partie

Soit \mathcal{F} un filtre sur E . On définit une relation \mathcal{R} sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F}, X \cap B = Y \cap B$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. [S]
2. Soit A une partie non vide de E . On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.
Montrer qu'alors : $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$. [S]
3. On suppose que E est infini et que \mathcal{F} est le filtre \mathcal{I}_E .
 Δ désigne l'opération différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$.
Montrer que : $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X\Delta Y$ est un ensemble fini. [S]

Quatrième Partie

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ de la relation d'ordre "inclusion".

Autrement dit, si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux filtres sur E , on pose $\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

NB : on pourra indifféremment utiliser le symbole \leq ou le symbole \subset .

On dit qu'un filtre \mathcal{F} de E est un *ultrafiltre* si : $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{F}(E), \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

1. Vérifier que pour toutes parties A, B non vides de E : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$. [S]
2. (a) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément minimum ? Si oui lequel ? [S]
(b) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément maximum ? Si oui lequel ? [S]
3. (a) Soit \mathcal{F}_A le filtre engendré par une partie A non vide de E .
Montrer que \mathcal{F}_A est un ultrafiltre si et seulement si A est un singleton $\{x\}$.
On dit que les $\mathcal{F}_{\{x\}}$ sont les ultrafiltres *triviaux*. [S]
(b) Quels sont les ultrafiltres sur E si l'ensemble E est fini ? [S]
4. On rappelle que pour toute partie A de E , \bar{A} est le complémentaire de A dans E .
Montrer qu'un filtre \mathcal{F} sur E est un ultrafiltre si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), (A \in \mathcal{F} \text{ ou } \bar{A} \in \mathcal{F})$$

[S]

5. Soit \mathcal{F} un filtre sur E . Montrer que \mathcal{F} est un ultrafiltre si et seulement si :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \text{ ou } B \in \mathcal{F})$$

[S]

6. (a) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre. [S]
(b) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est inclus dans aucun ultrafiltre trivial. [S]

Corrigé du problème

Première Partie

1. Soit \mathcal{F} un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (P_1) mais pas (P_2) .
Puisque l'ensemble vide appartient à \mathcal{F} , et puisque toute partie X de E contient \emptyset , de l'hypothèse (P_2) il découle que X est élément de \mathcal{F} , donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. [Q]
2. $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre sur E car il ne vérifie pas l'hypothèse (P_3) .
Si E est réduit à un singleton $\{x\}$, alors $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est un filtre sur E .
Mais si E contient au moins deux éléments distincts x et y , alors les singletons $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$ sont éléments de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, mais pas leur intersection (qui est vide).
Ainsi $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est un filtre sur E si et seulement si E est un singleton. [Q]
3. Soit \mathcal{F} un filtre sur E . Puisque $\mathcal{F} \neq \emptyset$, soit A un élément de \mathcal{F} .
L'inclusion $A \subset E$ et l'hypothèse (P_2) impliquent que E est élément de \mathcal{F} . [Q]
4. Tout d'abord \mathcal{F}_A est non vide car l'ensemble A est lui-même un élément de \mathcal{F}_A .
Ensuite, soient X et Y deux éléments de \mathcal{F}_A , c'est-à-dire deux parties de E contenant A .
On a bien sûr $A \subset X \cap Y$, ce qui prouve que $X \cap Y$ appartient à \mathcal{F}_A .
Ensuite, si $X \in \mathcal{F}_A$ et si $Y \subset E$ contient X , on a $A \subset X \subset Y$ donc $Y \in \mathcal{F}_A$.
Enfin, A étant non vide, l'ensemble vide n'est pas élément de \mathcal{F}_A ($\emptyset \notin \mathcal{F}_A$).
On a établi les propriétés (P_0) , (P_1) , (P_2) , (P_3) : \mathcal{F}_A est un filtre sur E . [Q]
5. On se donne deux parties non vides A et B de E telles que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$.
Il s'agit donc de prouver l'égalité $A = B$.
On sait que A est toujours élément de \mathcal{F}_A . On en déduit ici $A \in \mathcal{F}_B$, c'est-à-dire $B \subset A$.
Les deux ensembles A et B jouant le même rôle, il en découle $B \subset A$ puis $A = B$. [Q]
6. – Tout d'abord E est élément de \mathcal{I}_E , car il est le complémentaire de l'ensemble vide, qui est une partie finie de E . Donc \mathcal{I}_E est non vide : la propriété (P_0) est vérifiée.
– Soient X et Y deux éléments de \mathcal{I}_E : cela signifie que les complémentaires \overline{X} et \overline{Y} de X et Y sont des parties finies de E .
Il en est donc de même de l'ensemble $\overline{X} \cup \overline{Y}$, qui est le complémentaire de $X \cap Y$.
Ainsi $X \cap Y$ est élément de \mathcal{I}_E , ce qui établit la propriété (P_1) .
– Soit X un élément de \mathcal{I}_E et soit Y une partie de E contenant X .
Le complémentaire \overline{Y} est donc contenu dans celui de X , qui par hypothèse est fini.
Il en découle que \overline{Y} est fini, donc que Y est dans \mathcal{I}_E : cela établit (P_2) .
– Enfin l'ensemble vide n'est pas élément de \mathcal{I}_E car son complémentaire E est infini.
Cela établit (P_3) et achève de prouver que \mathcal{I}_E est un filtre sur E .
[Q]