Partitions d'un ensemble fini, surjections, involutions

Soit E un ensemble fini non vide.

Pour tout entier k, on dit que $\{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E; \qquad \forall i, A_i \neq \emptyset; \qquad \forall i, j \text{ (avec } i \neq j), \ A_i \cap A_j = \emptyset$$

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $\text{Card}(E) = n$.

On note $r(n)$ le nombre de partitions de E. On note $r(0) = 1$.

Pour tout $k \geq 1$, on note $r(n, k)$ le nombre de partitions de E en k classes.

1. Montrer que : $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*,\ k > n \Rightarrow r(n, k) = 0$. [S]
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ r(n) = \sum_{k=1}^{n} r(n, k)$. [S]
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ r(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, r(k)$. [S]
4. Calculer $r(n)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. [S]
5. Montrer que : $\forall\, n \geq 5,\ r(n) \geq 2^n$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ r(n) \leq n^n$. [S]
6. Dans cette question, on note S_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments.

   Montrer que : $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n^k = k! r(n, k)$. [S]

Partie II

On suppose que $\text{Card}(E) = 2m$, avec $m \geq 1$.

On note a_m le nombre de partitions de E en m classes qui sont des paires.

1. Déterminer a_1, a_2, a_3. Par convention, on pose $a_0 = 1$. [S]
2. Montrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ a_m = (2m-1)a_{m-1}$. [S]
3. En déduire $a_m = \dfrac{(2m)!}{2^m m!}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Partie III

On suppose que $\text{Card}(E) = n$, avec $n \geq 1$.

On note b_n le nombre de partitions de E en classes qui sont des paires ou des singletons.

1. Déterminer b_1, b_2, b_3, b_4. [S]
2. On suppose que $n = 2m$ $(m \geq 1)$. Montrer que : $b_{2m} = \sum_{k=0}^{m} \text{C}_{2m}^{2k}\ a_{m-k}$.

   Indication : classer les partitions suivant le nombre de singletons qu'elles contiennent. [S]
3. Montrer que : $\forall\ n \geq 3,\ b_n = b_{n-1} + (n-1)b_{n-2}$. [S]
4. Calculer b_n, pour $1 \leq n \leq 10$. [S]
5. Calculer le nombre d'applications involutives dans un ensemble à 10 éléments. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.