

## Partitions d'un ensemble fini, surjections, involutions

Soit  $E$  un ensemble fini non vide.

Pour tout entier  $k$ , on dit que  $\{A_1, \dots, A_k\}$  est une partition de  $E$  en  $k$  classes si :

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = E; \quad \forall i, A_i \neq \emptyset; \quad \forall i, j \text{ (avec } i \neq j), A_i \cap A_j = \emptyset$$

### Partie I

Dans cette partie, on suppose que  $\text{Card}(E) = n$ .

On note  $r(n)$  le nombre de partitions de  $E$ . On note  $r(0) = 1$ .

Pour tout  $k \geq 1$ , on note  $r(n, k)$  le nombre de partitions de  $E$  en  $k$  classes.

1. Montrer que :  $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, k > n \Rightarrow r(n, k) = 0$ . [S]
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, r(n) = \sum_{k=1}^n r(n, k)$ . [S]
3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, r(n+1) = \sum_{k=0}^n C_n^k r(k)$ . [S]
4. Calculer  $r(n)$  pour  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . [S]
5. Montrer que :  $\forall n \geq 5, r(n) \geq 2^n$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, r(n) \leq n^n$ . [S]
6. Dans cette question, on note  $S_n^k$  le nombre de surjections d'un ensemble à  $n$  éléments sur un ensemble à  $k$  éléments.  
Montrer que :  $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, S_n^k = k!r(n, k)$ . [S]

### Partie II

On suppose que  $\text{Card}(E) = 2m$ , avec  $m \geq 1$ .

On note  $a_m$  le nombre de partitions de  $E$  en  $m$  classes qui sont des paires.

1. Déterminer  $a_1, a_2, a_3$ . Par convention, on pose  $a_0 = 1$ . [S]
2. Montrer que :  $\forall m \in \mathbb{N}^*, a_m = (2m-1)a_{m-1}$ . [S]
3. En déduire  $a_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}$ . [S]



## Partie III

On suppose que  $\text{Card}(E) = n$ , avec  $n \geq 1$ .

On note  $b_n$  le nombre de partitions de  $E$  en classes qui sont des paires ou des singletons.

1. Déterminer  $b_1, b_2, b_3, b_4$ . [S]

2. On suppose que  $n = 2m$  ( $m \geq 1$ ). Montrer que :  $b_{2m} = \sum_{k=0}^m C_{2m}^{2k} a_{m-k}$ .

Indication : classer les partitions suivant le nombre de singletons qu'elles contiennent. [S]

3. Montrer que :  $\forall n \geq 3, b_n = b_{n-1} + (n-1)b_{n-2}$ . [S]

4. Calculer  $b_n$ , pour  $1 \leq n \leq 10$ . [S]

5. Calculer le nombre d'applications involutives dans un ensemble à 10 éléments. [S]