Dérangements entre ensembles finis

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, et on note S_n l'ensemble des *permutations* de E_n, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de E_n dans lui-même.

Pour tout f de S_n et pour tout k de E_n, on dit que k est un *point fixe* de f si $f(k) = k$.

On dit qu'un élément f de S_n est un *dérangement* de E_n si f ne possède aucun point fixe.

On note D_n le nombre de dérangements de E_n. Par convention, on pose $D_0 = 1$.

On généralise cette définition en disant qu'une bijection f d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sur un ensemble $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est un dérangement de A sur B (ainsi ordonnés) si pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$, on a $f(a_i) = b_j$ avec $j \neq i$. Il est clair qu'il y a alors autant de dérangements de A sur B qu'il y en a de E_n dans lui-même.

1. Que valent D_1 et D_2 ? [S]
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$.
   Indication : on cherchera à former un dérangement quelconque f de E_{n+2}, avec $n \geq 1$.
   Pour cela, on considèrera $k = f(n+2)$ et on s'intéressera à $f(k)$.
   [S]
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. [S]
4. Dans cette question, on retrouve le résultat de (3) mais par une autre méthode.
   Pour tout entier $k \geq 1$, et pour tout q de $\{0, \ldots, k\}$, on note $D_{k,q}$ le nombre des permutations de E_k qui ont exactement q points fixes. Ainsi $D_{k,0} = D_k$.
   Par convention on pose encore $D_{0,0} = 1$.
   (a) Montrer que $0 \leq q \leq k \leq n \Rightarrow \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^q = \mathrm{C}_n^q \mathrm{C}_{n-q}^{k-q}$. [S]
   (b) En déduire que, si $0 \leq q < n$, alors $\sum_{k=q}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^q = 0$ (et si $q = n$?). [S]
   (c) Prouver que pour tout $k \geq 0$, on a $k! = \sum_{r=0}^{k} D_{k,r} = \sum_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q D_q$. [S]
   (d) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k k!$ [S]
   (e) Retrouver ainsi le résultat de la question 3. [S]
5. On considère n boules discernables, placées initialement dans n tiroirs distincts, à raison d'une boule par tiroir. On sort les n boules, puis on les replace aléatoirement, toujours à raison d'une boule par tiroir. On note X la variable aléatoire discrète représentant le nombre de boules ayant retrouvé leur tiroir d'origine.
   (a) Montrer que $p(X=q) = \frac{1}{q!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$ [S]
   (b) Exprimer de même la probabilité de l'événement $X \geq 1$. [S]
   (c) Montrer que l'espérance de X est égale à 1. On proposera deux méthodes. [S]
   (d) Calculer la variance de X. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

1. Il n'y a qu'une application de E_1 dans lui-même, qui est bijective, mais n'est évidemment pas un dérangement ! Autrement dit : $D_1 = 0$.

   Il y a deux permutations de E_2 : l'identité et f définie par $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$.
   Seule cette dernière est un dérangement. Ainsi $D_2 = 1$. [Q]

2. Remarquons tout d'abord que la formule $D_{n+2} = (n+1)(D_n + D_{n+1})$ est vraie si $n = 0$ (avec la convention de l'énoncé, stipulant que $D_0 = 1$).

   Dans la suite de cette démonstration, on peut donc supposer $n \geq 1$.

   On cherche à former un des D_{n+2} dérangements possibles f de E_{n+2}.

   On choisit d'abord $k = f(n+2)$ parmi les $n+1$ éléments de $E_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

   On se propose ensuite de choisir $f(k)$. Il a deux cas possibles :

   – *Premier cas :* $f(k) = n+2$.

     L'application f échange donc les éléments k et $n+2$.

     La restriction g de f à $F_n = E_{n+2} \backslash \{k, n+2\}$ est une application de F_n dans lui-même.

     Mais f est un dérangement de E_{n+2} si et seulement si g est un dérangement de F_n.

     Puisque $\text{Card}(F_n) = n$, il y a D_n façons de définir g, donc f.

   – *Deuxième cas :* $f(k) \neq n+2$.

     On considère les ensembles E_{n+1} et G_{n+1}, ordonnés comme ci-dessous :

$$\begin{array}{lccccccccc} E_{n+1} & = \{ & 1 & 2 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n+1 & \} \\ G_{n+1} & = \{ & 1 & 2 & \ldots & k-1 & n+2 & k+1 & \ldots & n+1 & \} \end{array}$$

     La restriction h de f à E_{n+1} est une application de E_{n+1} sur G_{n+1}.

     Dire que f est un dérangement de E_{n+2}, c'est dire que h est un dérangement de E_{n+1} sur G_{n+1} (au sens de la généralisation de la définition, vue au début de l'énoncé).
     Il y a D_{n+1} façons différentes de définir h, c'est-à-dire de compléter la définition de f.

   Ainsi, après les $n+1$ choix possibles de $f(n+2)$, il y a $D_n + D_{n+1}$ façons de compléter f pour en faire un dérangement de E_{n+2}.

   Conclusion : le nombre de dérangements de E_{n+2} s'écrit $D_{n+2} = (n+1)(D_n + D_{n+1})$. [Q]

3. On démontre la propriété par une récurrence de pas 2.

   Remarquons tout d'abord que le résultat est vrai si $n = 0$ ou $n = 1$.

   En effet, pour $n = 0$, $\quad n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} = 1 = D_0$.

   De même, pour $n = 1$, $\quad n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 - 1 = 0 = D_1$.

   On suppose maintenant que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, avec $n \geq 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.