

Noyaux et images itérés

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Soit f un endomorphisme de E .

On pose $f^0 = \text{Id}_E$, et pour tout entier $k \geq 1$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

1. Montrer que $(\text{Im } f^k)_{k \geq 0}$ et $(\text{Ker } f^k)_{k \geq 0}$ forment respectivement une suite décroissante et une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E stables par f . [S]
2. Montrer que si $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$, alors $\forall m \geq k : \text{Ker } f^m = \text{Ker } f^k$. [S]
3. Montrer que si $\text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$, alors $\forall m \geq k : \text{Im } f^m = \text{Im } f^k$. [S]
4. Montrer successivement :
 - (a) $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff E = \text{Im } f + \text{Ker } f$. [S]
 - (b) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{\vec{0}\}$. [S]
 - (c) $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2$ et $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. [S]
5. Soit s (en supposant qu'il existe) le plus petit k tel que $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$. Soit r (en supposant qu'il existe) le plus petit k tel que $\text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$. On veut montrer que $r = s$.
 - (a) Montrer que si $s \leq r$, alors $\text{Im } f^s = \text{Im } f^r$, puis $s = r$. [S]
 - (b) Prouver que si $r \leq s$, alors $\text{Ker } f^s = \text{Ker } f^r$, puis $s = r$. [S]
 - (c) Conclure à l'égalité $r = s$. [S]
 - (d) Montrer que $E = \text{Im } f^r \oplus \text{Ker } f^r$. [S]
 - (e) Etablir que la restriction de f à $\text{Ker } f^r$ est nilpotente. [S]
 - (f) Montrer que la restriction de f à $\text{Im } f^r$ est un automorphisme de $\text{Im } f^r$. [S]
6. On suppose que E est de dimension finie n .
 - (a) Montrer que les entiers r et s existent, et que $r = s \leq n$. [S]
 - (b) Montrer que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. [S]
7. Donner un exemple des situations suivantes :
 - (a) L'entier r existe, mais pas l'entier s . [S]
 - (b) L'entier s existe, mais pas l'entier r . [S]
 - (c) Aucun des entiers r et s n'existe. [S]

Corrigé du problème

1. Pour tout entier naturel k , $\text{Ker } f^k$ et $\text{Im } f^k$ sont des sous-espaces vectoriels de E (car ils sont le noyau et l'image de f^k qui est un endomorphisme de E .)

D'autre part $x \in \text{Ker } f^k \Rightarrow f^k(x) = \vec{0} \Rightarrow f^{k+1}(x) = \vec{0} \Rightarrow x \in \text{Ker } f^{k+1}$.

Enfin $y \in \text{Im } f^{k+1} \Rightarrow (\exists x \in E, y = f^{k+1}(x)) \Rightarrow y = f^k(x')$ avec $x' = f(x)$.

On a donc vérifié les inclusions, pour tout entier k :

– $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$: la suite des $\text{Ker } f^k$ est croissante.

– $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$: la suite des $\text{Im } f^k$ est décroissante.

Enfin, puisque f^k commute avec f , le noyau et l'image de f^k sont stables par f (c'est une propriété classique du cours.)

On peut aussi remarquer que, pour tout entier naturel k :

– Si x est dans $\text{Ker } f^k$, alors $f(x)$ est dans $\text{Ker } f^{k-1}$ donc dans $\text{Ker } f^k$.

– Si y est dans $\text{Im } f^k$, alors $f(y)$ est dans $\text{Im } f^{k+1}$ donc dans $\text{Im } f^k$.

[Q]

2. On demande de prouver que si $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$ alors la suite des $\text{Ker } f^m$ est stationnaire à partir de $m = k$. Il suffit pour cela de prouver que si $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$ alors $\text{Ker } f^{k+1} = \text{Ker } f^{k+2}$, et la conclusion en découle par une récurrence évidente.

Compte tenu de la croissance de la famille des noyaux itérés, il suffit de démontrer que si $\text{Ker } f^{k+1} \subset \text{Ker } f^k$ alors $\text{Ker } f^{k+2} \subset \text{Ker } f^{k+1}$.

En effet, supposons $\text{Ker } f^{k+1} \subset \text{Ker } f^k$ et soit x un élément de $\text{Ker } f^{k+2}$.

Alors $f^{k+2}(x) = \vec{0}$, c'est-à-dire $f^{k+1}(f(x)) = \vec{0}$.

Autrement dit $f(x)$ appartient à $\text{Ker } f^{k+1}$ donc à $\text{Ker } f^k$.

Il s'ensuit que $f^k(f(x)) = \vec{0}$, c'est-à-dire $x \in \text{Ker } f^{k+1}$, ce qu'il fallait démontrer. [Q]

3. Il suffit là encore de prouver que si $\text{Im } f^k \subset \text{Im } f^{k+1}$ alors $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^{k+2}$.

Avec cette hypothèse, soit y un élément de $\text{Im } f^{k+1}$.

Par définition il existe un élément x de E tel que $y = f^{k+1}(x)$, donc $y = f(f^k(x))$.

Le vecteur $z = f^k(x)$ est dans $\text{Im } f^k$ donc dans $\text{Im } f^{k+1}$.

Il existe donc un vecteur x' de E tel que $z = f^{k+1}(x')$.

On en déduit que $y = f(z) = f^{k+2}(x)$: y appartient bien à $\text{Im } f^{k+2}$. [Q]

4. (a) – On suppose que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. Soit x un élément quelconque de E .

$f(x)$ est dans $\text{Im } f$ donc dans $\text{Im } f^2$: il existe x' dans E tel que $f(x) = f^2(x')$.

Avec cette notation, on constate que $f(x - f(x')) = \vec{0}$.

Le vecteur $x'' = x - f(x')$ est donc un élément de $\text{Ker } f$.

L'égalité $x = f(x') + x''$ est bien la décomposition de x comme somme d'un vecteur de $\text{Im } f$ et d'un vecteur de $\text{Ker } f$.

On a donc prouvé que E est la somme des sous-espaces $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.