Sous-groupes distingués

Soit G un groupe, qui n'est pas supposé abélien. On note $(a,b) \mapsto ab$ la loi de G.
On note e le neutre de G, et a^{-1} le symétrique de tout élément a de G.

Pour toute partie X non vide de G, et pour tous éléments a, b de G, on pose :

$$aX = \{ax,\ x \in X\} \qquad Xb = \{xb,\ x \in X\} \qquad aXb = a(Xb) = (aX)b = \{axb,\ x \in X\}$$

Les propriétés suivantes sont évidentes et n'ont pas à être démontrées :

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} aX \subset aY \\ Xb \subset Yb \\ aXb \subset aYb \end{cases} \qquad \begin{cases} a(bX) = (ab)X \\ (Xa)\,b = X(ab) \\ a(bXc)d = (ab)X(cd) \end{cases} \qquad eX = Xe = X$$

On rappelle que les automorphismes intérieurs de G sont les applications φ_a définies par :

$$\forall\, a \in G,\ \forall\, x \in G,\ \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

Partie I. Définition des sous-groupes distingués

1. Soit H un sous-groupe de G.

   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) Pour tout a de G, $aH \subset Ha$

   ii) Pour tout a de G, $Ha \subset aH$

   iii) Pour tout a de G, $aH = Ha$

   On dit qu'un sous-groupe H de G est *distingué* s'il vérifie ces conditions. [S]

2. Soit H un sous-groupe d'un groupe G.

   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) H est distingué dans G

   ii) $\forall\, a \in G,\ aHa^{-1} = H$

   iii) $\forall\, a \in G,\ aHa^{-1} \subset H$

   Exprimer cette propriété avec la terminologie des automorphismes intérieurs de G. [S]

Partie II. Exemples de sous-groupes distingués

1. Soit G un groupe. Vérifier que $\{e\}$ et G sont distingués dans G. [S]
2. Que peut-on dire des sous-groupes distingués d'un groupe abélien G ? [S]
3. Soient G et $\widetilde{G}$ deux groupes. Soit $f : G \to \widetilde{G}$ un morphisme de groupes.
   (a) On suppose que $\widetilde{H}$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$.
   Montrer que son image réciproque par f est un sous-groupe distingué H de G. [S]
   (b) Dans cette question, on suppose que le morphisme f est surjectif.
   Soit H un sous-groupe distingué de G.
   Montrer que $\widetilde{H} = f(H)$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$. [S]
   (c) Que dire du noyau de f ? [S]

Partie III. Centre et centralisateurs

Soit G un groupe. Soit X une partie non vide quelconque de G.

On appelle *centralisateur* de X l'ensemble $X' = \{a \in G, \forall x \in X, ax = xa\}$.

On appelle *centre* de G l'ensemble $C = \{a \in G, \forall x \in G, ax = xa\}$.

Le centre de G est donc le centralisateur G' de G lui-même.

1. (a) Montrer que X' est un sous-groupe de G. [S]
   (b) Montrer que le sous-groupe C est distingué dans G. [S]
2. Avec les automorphismes intérieurs, retrouver que C est distingué dans G. [S]
3. Dans cette question X et Y sont deux parties non vides quelconques de G.
   (a) Vérifier que $X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'$. [S]
   (b) On pose $X'' = (X')'$. Montrer que X est inclus dans X''. [S]
   (c) On pose $X''' = ((X')')')$. Montrer que $X' = X'''$. [S]
4. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe de G.
   (a) Montrer les équivalences : H abélien$\Leftrightarrow$ $H \subset H' \Leftrightarrow H''$ abélien. [S]
   (b) Montrer que si H est distingué, alors H' est distingué. [S]

Partie IV. Produit de deux sous-groupes

Dans cette partie, H et K sont deux sous-groupes quelconques de G.

On pose $HK = \{hk,\ h \in H,\ k \in K\}$ et $KH = \{kh,\ k \in K,\ h \in H\}$.

1. Montrer que $HK \subset KH \Leftrightarrow KH \subset HK \Leftrightarrow HK = KH$. [S]
2. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. [S]
3. On suppose que l'un des deux sous-groupes H ou K est distingué.
   Montrer que $HK = KH$. Conclusion ? [S]

Partie V. Quotient par un sous-groupe distingué

Soit H un sous-groupe quelconque de G.

On définit sur G une relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.

   Quelle est cette relation si $H = G$? si $H = \{e\}$? [S]

2. Vérifier que la classe d'équivalence d'un élément a de G est $\overline{a} = aH$. [S]

3. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe distingué de G.

   On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence de G pour la relation $\mathcal{R}$.

   (a) Soient x et y deux éléments de G. Montrer que $\overline{xy}$ ne dépend que de $\overline{x}$ et de $\overline{y}$. [S]

   (b) On peut donc définir une loi sur G/H en posant : $\forall\,(x, y) \in G^2$, $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}$.

   Montrer qu'alors G/H est un groupe. Quel est le neutre ? l'inverse de $\overline{x}$?

   On dit que G/H est le *groupe quotient* de G par le sous-groupe distingué H. [S]

   (c) Montrer l'équivalence des deux propriétés :

   – Le groupe G/H est commutatif.

   – Pour tous x, y de G, l'élément $y^{-1}x^{-1}yx$ est dans H.

   [S]