Trois études de suites

Exercice 1

Soit k un entier naturel fixé. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j})}$.

1. **Quelques valeurs numériques**
   (a) On choisit $k = 5$.
   Calculer u_n avec 5 chiffres significatifs, quand $1 \leq n \leq 10$, $n = 20$, $n = 50$. [S]
   (b) Même question avec $k = 10$. [S]
2. **Convergence de la suite** (u_n)
   (a) Dans le cas général, calculer le rapport $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$, pour tout $n \geq 2$. [S]
   (b) En déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang N à préciser. [S]
   (c) Montrer que la suite u est convergente. [S]
3. **Limite de la suite** (u_n)
   (a) Montrer $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq M \Rightarrow \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ [S]
   (b) Montrer que : $\forall\, x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ et que : $\forall\, x > 0$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. [S]
   (c) En déduire que : $\forall\, n \geq M$, $\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) \leq \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$. [S]
   (d) Conclure à $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$. [S]

Exercice 2

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$. On veut calculer $\lim\limits_{+\infty} u_n$.

1. **Première méthode.**
   On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
   (a) Etablir : $\forall\, x \geq 0$, $0 \leq x - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^2}{2}$. [S]
   (b) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 + \ln(v_n) - \ln(v_{n+1}) \leq \dfrac{1}{2n}$. [S]
   (c) Montrer que : $\forall\, x \in [0,1[$, $x \leq -\ln(1-x)$. [S]
   (d) En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$. [S]
   (e) Prouver finalement que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(v_n) = 1$, puis calculer $\lim\limits_{+\infty} u_n$. [S]
2. **Deuxième méthode.**
   (a) Vérifier que : $\forall\, n \geq 1$, $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(n)$. [S]
   (b) En encadrant $\ln(k)$ à l'aide d'intégrales, encadrer $\ln(u_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Exercice 3

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{n}\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}$.

1. Calculer u_1 et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. [S]
2. Prouver par récurrence que $u_n \leq \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$. [S]
3. Montrer : $\exists\, L \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ tel que $\lim\limits_{+\infty} u_n = L$. [S]
4. Montrer que : $\forall\, x > 0$, $\dfrac{1}{8(x+\frac{1}{2})} \leq (x+\frac{1}{2}) - \sqrt{x(x+1)} \leq \dfrac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$. [S]
5. En déduire que : $\forall\, k \geq 1$, $\dfrac{u_k}{8(k+\frac{1}{2})} - \dfrac{u_k}{8(k+\frac{3}{2})} \leq u_{k+1} - u_k \leq \dfrac{u_k}{8k} - \dfrac{u_k}{8(k+1)}$. [S]
6. Encadrer $u_p - u_n$ (pour $p > n$), puis établir : $\forall\, n \geq 1$, $\dfrac{u_n}{8(n+\frac{1}{2})} \leq L - u_n \leq \dfrac{L}{8n}$. [S]
7. En déduire la majoration suivante : $\forall\, n \geq 1$, $\left|L - \left(1 + \dfrac{1}{8n}\right)u_n\right| \leq \dfrac{L}{16n^2}$. [S]
8. Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près ? Même question avec $\left(1 + \dfrac{1}{8n}\right)u_n$. [S]

   NB : on peut montrer (mais on ne demande pas de le prouver) que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigé du problème

Exercice 1

1. (a) On laisse à Maple le soin de faire les calculs :

```
> u :=n->sqrt((n+k)!)/product(1+sqrt(j),j=1..n) ;
```

$$u := n \to \frac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j})}$$

Pour $k = 5$, on calcule u_n avec $1 \leq n \leq 10$, $n = 20$, $n = 50$.

```
> k :=5 : map(n->u[n]=evalf(u(n),5),[$1..10,20,50]) ;
```

$[u_1 = 13.417,\ u_2 = 14.704,\ u_3 = 15.222,\ u_4 = 15.222,\ u_5 = 14.874,\ u_6 = 14.302,$
$u_7 = 13.589, u_8 = 12.798,\ u_9 = 11.972,\ u_{10} = 11.139,\ u_{20} = 4.7505,\ u_{50} = .33147]$ [Q]

(b) Même calcul, mais avec $k = 10$:

```
> k :=10 : map(n->u[n]=evalf(u(n),5),[$1..10,20,50]) ;
```

$[u_1 = 3159.0,\ u_2 = 4532.8,\ u_3 = 5982.2,\ u_4 = 7461.2,\ u_5 = 8929.7,\ u_6 = 10355.,$
$u_7 = 11710., u_8 = 12977.,\ u_9 = 14141.,\ u_{10} = 15194.,\ u_{20} = 19646.,\ u_{50} = 8484.4]$
[Q]

2. (a) Pour tout entier $n \geq 2$: $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j})} \dfrac{\prod_{j=1}^{n-1}(1+\sqrt{j})}{\sqrt{(n+k-1)!}} = \dfrac{\sqrt{n+k}}{1+\sqrt{n}}$

Remarque : en continuant la session Maple de la question précédente, on peut obtenir le résultat à condition de bien spécifier que n et k sont des entiers et d'utiliser successivement les instructions `expand` et `simplify` :

```
> assume(n,posint) :assume(k,posint) :
  'u[n]/u[n-1]'=simplify(expand(u(n)/u(n-1))) ;
```

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\sqrt{n+k}}{1+\sqrt{n}}$$

[Q]

(b) On a $u_n \leq u_{n-1} \Leftrightarrow \sqrt{n+k} \leq 1+\sqrt{n} \Leftrightarrow k \leq 1+2\sqrt{n} \Leftrightarrow n \geq \dfrac{(k-1)^2}{4}$

La suite u est donc décroissante à partir par exemple de $N = \left[\dfrac{(k-1)^2}{4}\right] + 1$. [Q]

(c) La suite u est convergente car elle est décroissante (du moins à partir d'un certain rang) et minorée (tous les u_n sont positifs.) [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.