Accélération de convergence pour une série

On se propose de trouver une valeur approchée de la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Pour tout entier $N \geq 1$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

1. (a) Justifier l'existence de la somme S, le signe de R_N et un majorant de $|R_N|$. [S]
   (b) Donner un majorant de l'erreur commise dans l'approximation $S \approx S_N + \dfrac{1}{2}u_{N+1}$.
   Avec ce résultat, combien faudrait-il de termes pour calculer S à 10^{-4} près ? [S]
2. Pour $n \geq 1$, on note $u'_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
   (a) Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ [S]
   (b) En déduire la convergence de la série $\sum u'_n$. [S]
   (c) Montrer que $S_{2N} = S'_N$ et $R_{2N} = R'_N$, avec $S'_N = \sum_{n=1}^{N} u'_n$ et $R'_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u'_n$. [S]
3. (a) Montrer que $u'_n \sim v_n - v_{n-1}$, avec $v_n = -\dfrac{1}{2\sqrt{2n}}$. [S]
   (b) Pour tout $n \geq 2$, on pose $w_n = u'_n - (v_n - v_{n-1})$.
   Justifier la convergence de $\sum w_n$ et montrer que $R'_N = \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n$. [S]
4. (a) Montrer qu'on peut écrire $w_n = f(n)$, où $f(t)$ est croissante négative. [S]
   (b) En déduire que $F(n) - F(n-1) \leq w_n \leq F(n+1) - F(n)$, l'application F étant définie par $F(t) = \sqrt{2t-1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t-2}$. [S]
   (c) Former le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. [S]
   (d) Donner un équivalent de $F(t)$ quand $t \to \infty$. [S]
5. (a) Montrer que $-F(N) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n \leq -F(N+1)$. [S]
   (b) Montrer que $t \to \Delta(t) = F(t) - F(t+1)$ est une fonction décroissante de t.
   Donner un équivalent de $\Delta(t)$ quand $n \to \infty$. [S]
6. Les questions précédentes montrent donc que, pour tout $N \geq 1$.
   $S = S_{2N} + R_{2N} = S_{2N} + R'_N = S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n$.
   On a donc l'encadrement : $S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} - F(N) \leq S \leq S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} - F(N+1)$.
   On sait enfin que l'amplitude de cet encadrement est une fonction décroissante de l'entier N et tend vers 0 avec la vitesse de $N^{-5/2}$. Montrer qu'il suffit de choisir $N = 14$ pour connaître S à 10^{-4} près. Quel est l'encadrement obtenu ? [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.