Convergence et valeur d'un produit infini

Soit $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Pour tout $m \geq q$, on pose $P_m = \displaystyle\prod_{n=q}^{m} u_n = u_q u_{q+1} \cdots u_m$.

On dit que les $(P_m)_{m\geq q}$ sont les produits partiels du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$.

Si $(P_m)_{m\geq q}$ converge vers une limite non nulle, on dit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ converge.

Cette limite est alors notée $\displaystyle\prod_{n=q}^{\infty} u_n$. On l'appelle la *valeur* du produit infini.

Si $(P_m)_{m\geq q}$ est divergente ou de limite nulle, on dit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ est divergent.

Par abus de langage, on pourra cependant noter $\displaystyle\prod_{n=q}^{\infty} u_n = 0$ si $\displaystyle\lim_{m\to\infty} P_m = 0$.

Partie 1

Dans cette partie, on établit une condition nécessaire de convergence et on calcule quelques produits infinis.

1. Montrer que si $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ converge, alors les u_n sont tous non nuls et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. [S]
2. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ est divergent, et que $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$.

   Remarque : cet exemple prouve que la réciproque du résultat vu en 1.1 est fausse. [S]
3. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergent et de valeur $\dfrac{1}{2}$. [S]
4. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ est convergent et de valeur $\dfrac{1}{3}$. [S]
5. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ est convergent et de valeur 1. [S]

Partie 2

Dans cette partie, on étudie les produits infinis de réels strictement positifs.

On note $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Prouver que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq q} \ln u_n$ converge.

   Préciser alors la relation entre les valeurs $\displaystyle\prod_{n=q}^{\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=q}^{\infty} \ln u_n$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

2. Dans cette question, on suppose que les u_n sont tous dans $]0,1]$ ou tous dans $[1,+\infty[$.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge.
   Indication : on commencera par supposer que la suite $(u_n)_{n\geq q}$ ne converge pas vers 1. [S]
3. Dans cette question uniquement, on pose $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$ pour $n \geq 1$.
   Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(u_n-1)$ diverge mais que le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge.
   Remarque : cet exemple montre l'importance des hypothèses de la question 2.2. [S]
4. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ est convergente.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q}^{\infty} u_n$ a même nature que la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)^2$.
   Indication : on pourra noter que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ et développer $\ln(1+v_n)$ avec $v_n = u_n - 1$. [S]
5. Déduire de ce qui précède un exemple où $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge mais où $\prod_{n\geq q} u_n$ diverge. [S]

Partie 3

On désigne par $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de $\mathbb{C}$, et on suppose que tous les u_n sont non nuls.

On suppose que la série $\sum_{n\geq q}|u_n-1|$ est convergente et donc que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

L'objectif de cette partie est de montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ est convergent.

On pose $v_n = u_n - 1$, $P_n = \prod_{k=q}^{n} u_k$, et $Q_n = \prod_{k=q}^{n}(1+|v_k|)$.

1. Pour tous nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, montrer que $\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)-1$.
   Indication : Raisonnement par récurrence sur n. [S]
2. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q}(1+|v_n|)$ est convergent. [S]
3. Montrer que pour tous entiers n et m tels que $n > m \geq q$, on a : $|P_n - P_m| \leq Q_n - Q_m$. [S]
4. Déduire de la question précédente que la suite $(P_n)_{n\geq q}$ est convergente. [S]
5. Il reste à montrer que la limite de la suite $(P_n)_{n\geq q}$ est non nulle.
   (a) Montrer que pour complexe z tel que $|z| < 1$, on a $\Big|\ln|1+z|\Big| \leq -\ln(1-|z|)$. [S]
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq q}\ln|u_n|$ est absolument convergente. [S]
   (c) En déduire que la limite de la suite $(P_n)_{n\geq q}$ ne peut pas être nulle. [S]
6. Conclure... [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Partie 4

Cette partie est consacrée à l'expression de $\dfrac{\sin t}{t}$ sous la forme d'un produit infini.
Cette expression est dûe à Euler. La première question est indépendante des suivantes.

1. Calcul du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$
   (a) Justifier la convergence de ce produit infini sans chercher à calculer sa valeur. [S]
   (b) Exprimer le produit partiel $P_m=\displaystyle\prod_{n=1}^{m}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$ à l'aide de factorielles. [S]
   (c) Utiliser la formule de Stirling et en déduire que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)=\frac{2}{\pi}$. [S]
2. On établit ici une première factorisation de $\sin(2p+1)\theta$. Soit $p\in\mathbb{N}$, et $\theta\in\mathbb{R}$.
   (a) Prouver $\sin(2p+1)\theta=A_p(\sin\theta)$, où $A_p(\mathrm{X})=(-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,\mathrm{X}^{2k+1}\,(\mathrm{X}^2-1)^{p-k}$ [S]
   (b) Montrer que A_p est un polynôme de degré $2p+1$, de coefficient dominant $(-4)^p$. [S]
   (c) Montrer que les racines de A_p sont les $x_k=\sin\theta_k$, où $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2p+1}$ et $-p\le k\le p$. [S]
   (d) En déduire que $\sin(2p+1)\theta=4^p\sin\theta\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\sin^2\theta_k-\sin^2\theta)$. [S]
   (e) En utilisant $\theta\to 0$ montrer que : $\sin(2p+1)\theta=(2p+1)\sin\theta\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_k}\Big)$ [S]
3. On établit maintenant une deuxième factorisation de $\sin(2p+1)\theta$.
   Soit p un entier naturel, et θ un réel compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Montrer $\sin(2p+1)\theta=\sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\,B_p(\tan\theta)$ où B est un polynôme de degré $2p$.
   Indication : ré-utiliser les calculs fait en 4.2.a [S]
   (b) Montrer que les racines de B_p sont les $t_k=\tan\theta_k$ où $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2p+1}$ et $0<|k|\le p$. [S]
   (c) En déduire la factorisation : $B_p(\tan\theta)=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\tan^2\theta_k-\tan^2\theta)$. [S]
   (d) En faisant tendre θ vers 0, prouver que : $B_p(\tan\theta)=(2p+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Big)$. [S]
   (e) En déduire la factorisation : $\sin(2p+1)\theta=(2p+1)\sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Big)$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

4. Développement de $\sin t$ en produit infini.

   (a) Montrer que si $0 \le x \le y < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\dfrac{\tan x}{\tan y} \le \dfrac{x}{y} \le \dfrac{\sin x}{\sin y}$. [S]

   (b) On rappelle la notation $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2p+1}$, avec $k \in \{1, \cdots, p\}$.

   Montrer que si $0 \le \theta < \theta_1$: $\sin(2p+1)\theta \le (2p+1)\sin\theta \displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\theta^2}{\theta_k^2}\Big) \le \frac{\sin(2p+1)\theta}{\cos^{2p}\theta}$. [S]

   (c) On pose maintenant $\theta = \dfrac{t}{2p+1}$ avec $0 \le t < \pi$, et on fait tendre p vers $+\infty$.

   En déduire le résultat suivant, dû à Euler : $\forall t \in]-\pi, \pi[$, $\quad \dfrac{\sin t}{t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2}\Big)$ [S]

5. Retrouver le résultat de la question 4.1. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Corrigé du problème

Partie 1

1. Pour tout $m \geq q$, soit $P_m = \prod_{n=q}^{m} u_n$. Si l'un au moins des u_n était nul, alors la suite $(P_m)_{m\geq q}$ serait stationnaire en 0. Le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ serait donc divergent.

   Inversement supposons que ce produit infini converge, et soit P sa valeur non nulle.
   Par définition $\lim_{m\to\infty} P_m = P$. Or $u_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ pour $n > q$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n = \dfrac{P}{P} = 1$. [Q]

2. On a : $P_m = \prod_{n=2}^{m}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{m}\dfrac{n-1}{n} = \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}\dfrac{1}{n} = \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\dfrac{1}{n} = 1\cdot\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{m}$

   Donc, quand $m\to\infty$: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Ce produit infini est donc divergent. [Q]

3. Comme précédemment, pour tout entier $m \geq 2$:

$$\begin{aligned}
P_m = \prod_{n=2}^{m}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \prod_{n=2}^{m}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}(n+1)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2}\\
&= \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=3}^{m+1} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2} = 2\cdot m(m+1)\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{m^2} = \frac{m+1}{2m} \to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   Le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ est donc convergent, et sa valeur est $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$. [Q]

4. Pour tout entier $m \geq 2$:

$$\begin{aligned}
P_m &= \prod_{n=2}^{m}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) = \prod_{n=2}^{m}\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\\
&= \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}(n+2)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n+1} = \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=4}^{m+2} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\cdot\prod_{n=3}^{m+1}\frac{1}{n}\\
&= 6\cdot m(m+1)(m+2)\cdot\frac{1}{6}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{m+2}{3m} \to \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   Le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$ est donc convergent, et $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right) = \dfrac{1}{3}$. [Q]

5. Posons $u_n = 1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. On a : $u_{2n-1} = 1+\dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{2n}{2n-1}$ et $u_{2n} = 1-\dfrac{1}{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}$.
   Ainsi $u_{2n-1}u_{2n} = 1$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit, pour tout $m \geq 1$:

$$P_{2m} = \prod_{n=1}^{2m} u_n = \prod_{n=1}^{m}(u_{2n-1}u_{2n}) = 1 \text{ et } P_{2m+1} = P_{2m}\,u_{2m+1} = 1+\frac{1}{2m+1}.$$

   La suite $(P_m)_{m\geq 1}$ converge donc vers 1. Autrement dit $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 1$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.