Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout k de $\{0,\dots,n\}$, on pose $R_{n,k}(x) = \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

   (a) Prouver les trois égalités suivantes :
   $\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} kR_{n,k}(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)R_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$. [S]

   (b) En déduire l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x)$. [S]

2. Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
   $\forall (x,y) \in [a,b]^2, |y-x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.
   Indication : raisonner par l'absurde et introduire un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$ telles que $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. [S]

3. Soit f une application définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x)$.
   On dit que les $B_n(f)$ sont les polynômes de Bernstein de f.
   On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
   On se donne $\varepsilon > 0$. On sait d'après la question précédente qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :
   $\forall (x,y) \in [0,1]^2, |y-x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

   (a) Montrer que $f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x)$. [S]

   (b) Soit x un élément de $[0,1]$. On note $A = \left\{k \in \{0,\dots,n\}, \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha\right\}$.
   Soit B le complémentaire de A dans $\{0,\dots,n\}$.

   i. Montrer que $\sum_{k\in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \varepsilon$. [S]

   ii. Prouver $\alpha^2 \sum_{k\in B} R_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$ [S]

   iii. Prouver que $\sum_{k\in B} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [S]

   iv. Montrer finalement que $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [S]

   (c) En déduire que la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. [S]

4. Montrer plus généralement le *théorème de Weierstrass* :
   Toute application g continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômiales. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.