Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout k de $\{0,\ldots,n\}$, on pose $R_{n,k}(x) = \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}$.

   (a) Prouver les trois égalités suivantes :
   $\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} kR_{n,k}(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)R_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$. [S]

   (b) En déduire l'égalité : $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x)$. [S]

2. Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
   $\forall (x,y) \in [a,b]^2, |y-x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.
   Indication : raisonner par l'absurde et introduire un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$ telles que $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(y_n)-f(x_n)| \geq \varepsilon$. [S]

3. Soit f une application définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x)$.
   On dit que les $B_n(f)$ sont les polynômes de Bernstein de f.
   On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
   On se donne $\varepsilon > 0$. On sait d'après la question précédente qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :
   $\forall (x,y) \in [0,1]^2, |y-x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

   (a) Montrer que $f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x)$. [S]

   (b) Soit x un élément de $[0,1]$. On note $A = \left\{k \in \{0,\ldots,n\}, \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha\right\}$.
   Soit B le complémentaire de A dans $\{0,\ldots,n\}$.

      i. Montrer que $\sum_{k\in A}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \varepsilon$. [S]

      ii. Prouver $\alpha^2 \sum_{k\in B} R_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in B}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$ [S]

      iii. Prouver que $\sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [S]

      iv. Montrer finalement que $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [S]

   (c) En déduire que la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. [S]

4. Montrer plus généralement le *théorème de Weierstrass* :
   Toute application g continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômiales. [S]