Courbes et surfaces

Sommaire

I Nappes paramétrées. propriétés affines 2
II Arcs paramétrés : propriétés métriques 4
II.1 Rectification d'un arc paramétré 4
II.2 Abscisse curviligne 5
II.3 Formules de Frenet pour un arc plan 6

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

I Nappes paramétrées. propriétés affines

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3.

Il est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On identifiera un point M de $\mathcal{E}$ avec le triplet (x, y, z) de ses coordonnées dans ce repère.

Définition (Nappes paramétrées)

On appelle *nappe paramétrée* tout couple (U, f), où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$ et où f est une application de U dans $\mathcal{E}$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarques et définitions

- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$, on parle de nappe de classe $\mathcal{C}^k$.
  Pour tout couple (u, v) de U, $f(u, v)$ est appelé point de paramètres u, v de la nappe paramétrée (U, f). On le note $M(u, v)$.
- L'ensemble $f(U) \subset \mathcal{E}$ est appelé le *support* de la nappe paramétrée.
- Se donner la nappe paramétrée (U, f) c'est se donner trois applications numériques $x(u, v)$, $y(u, v)$ et $z(u, v)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (coordonnées de $M(u, v)$).
- Un point M du support $f(U)$ de la nappe est dit *simple* s'il existe un unique couple (u, v) de U tel que $M = M(u, v)$.
  Sinon M est dit multiple (double, triple, etc, ...).

Définition (Point régulier d'une nappe paramétrée)

Un point $M(u_0, v_0)$ du support de la nappe (U, f) est dit *régulier* si les vecteurs $\dfrac{\partial F}{\partial u}(M)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}(M)$ sont libres. Sinon il est dit *stationnaire*.
On dit que la nappe (U, f) est régulière si tous ses points sont réguliers.

Cas particulier

- La nappe est dite *cartésienne* si le paramétrage s'écrit $(x, y) \mapsto M(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$.
  On parle alors de la nappe d'équation $z = \varphi(x, y)$. Cette nappe est simple et régulière.
  En effet $\dfrac{\partial F}{\partial x}(M) = (1, 0, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y))$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M) = (0, 1, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}x, y))$ sont libres.

Définition (Notions de surface)

Soit F une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathcal{S} = \{M(x, y, z), F(x, y, z) = 0\}$ s'appelle la *surface* d'équation $F(x, y, z) = 0$.

Définition (Point régulier d'une surface)

Un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de la surface $F(x, y, z) = 0$ est dit *régulier* si $\text{grad}F(M) \neq 0$, c'est-à-dire si : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, ou $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, ou $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Définition (paramétrage local d'une surface)

On dit que la surface $\mathcal{S}$ admet un *paramétrage local* en M_0 s'il existe un ouvert U_0 contenant M_0, contenu dans V, et une nappe paramétrée (U, f) de support $\mathcal{S} \cap U_0$.

Remarque

– Si le point M_0 est régulier alors la surface $\mathcal{S}$ admet en M_0 un paramétrage local.
Par exemple si $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors il existe un paramétrage local du type $z = \varphi(x, y)$.

Définition (Plan tangent en un point régulier d'une nappe)

Le *plan tangent* en un point régulier $M(u_0, v_0)$ d'une nappe paramétrée (U, f) est le plan passant par $M(u_0, v_0)$ et dirigé par $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Son équation est donc $\det\left(\overrightarrow{M_0M}, \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right) = 0$.

Définition (Plan tangent en un point régulier d'une surface)

Le *plan tangent* en un point régulier M_0 de la surface déquation $F(M) = 0$ est le plan affine de $\mathcal{E}$ passant par le point M_0 et orthogonal au vecteur $\text{grad}F(M_0)$.

Son équation est donc : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0)(X - x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)(Y - y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0)(Z - z_0) = 0$.

Remarques

– Pour une surface ayant un paramétrage local en M_0, les deux notions de plan tangent en M_0 coïncident.

– On appelle *tangente* en un point M_0 d'une surface (d'une nappe paramétrée) toute droite passant par M_0 et contenue dans le plan tangent.
On appelle *normale* en M_0 la droite passant par M_0 et orthogonale au plan tangent.

– La normale en un point M_0 régulier de la surface d'équation $F(M) = 0$ est dirigée par le vecteur $\text{grad}F(M)$.
En un point régulier de la nappe (U, f), elle est dirigée par le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Intersection de deux surfaces

– Soient deux surfaces, $\mathcal{S}_1$ d'équation $F_1(M) = 0$, et $\mathcal{S}_2$ d'équation $F_2(M) = 0$.
On suppose que leur intersection Γ contient un point M_0 régulier pour ces deux surfaces.
Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les deux plans tangents en M_0.

– Si $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, on dit que les surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont tangentes en M_0.

– Si $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, la droite $D = \mathcal{P}_\infty \cap \mathcal{P}_\in$ est la tangente en M_0 à un arc paramétré de support inclus dans Γ. Un vecteur directeur de cette tangente est $\text{grad}F_1(M_0) \wedge \text{grad}F_2(M_0)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.