II Arcs paramétrés : propriétés métriques

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$, euclidien orienté, de dimension 2 ou 3.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé.

On suppose que $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.

II.1 Rectification d'un arc paramétré

Définition (Ligne polygonale inscrite dans un arc)

Soit $(I=[a,b],f)$ un arc paramétré continu de $\mathcal{E}$ (avec $a<b$).
Soit $\sigma=\{t_0=a<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b\}$ une subdivision du segment $[a,b]$.
La suite des points $(M(t_k))_{k=0,\dots,n}$ est appelée ligne polygonale inscrite dans l'arc (I,f).
La quantité $L_\sigma=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\overrightarrow{M(t_k)M(t_{k+1})}\right\|$ est la longueur de cette ligne polygonale.

Définition (Arc rectifiable)

On dit que l'arc paramétré $(I=[a,b],f)$ est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.
On appelle alors longueur de cet arc la quantité : $L=\sup_\sigma(L)$, le "Sup" étant pris sur l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.

Proposition (Condition suffisante de rectifiabilité)

Si l'arc $(I=[a,b],f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors il est rectifiable et sa longueur est $\displaystyle\int_a^b\|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Invariance par changement de paramétrage

On suppose que $(I=[a,b],f)$ et $(J=[c,d],g)$ (avec $a<b$ et $c<d$) sont deux représentations paramétriques du même arc de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui signifie qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ de I dans J tel que $f=g\circ\varphi$. Alors les longueurs des arcs (I,f) et (J,g) sont égales.

C'est une conséquence de $\displaystyle\int_a^b\|f'(t)\|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\|g'\circ\varphi(t)\|\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_c^d\|g'(u)\|\,\mathrm{d}u$.

Cas particuliers (Tous les arcs considérés ici sont de classe $\mathcal{C}^1$ au moins)

– Arc plan défini par les applications coordonnées $(x(t),y(t))$:

La longueur de l'arc $(I=[a,b],f)$ est $L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

– Arc plan défini par l'équation $y=y(x)$:

La longueur de l'arc $(I=[a,b],f)$ est $L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

– Arc plan défini, en polaires, par l'équation $\rho = \rho(\theta)$:
La longueur de l'arc $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.
– Arc gauche défini en cartésiennes par les applications $x(t), y(t), z(t)$:
La longueur de $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.
– Arc gauche défini en cylindriques par les applications $\rho(\theta), z(\theta)$:
La longueur de $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) + z'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

II.2 Abscisse curviligne

Définition

Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, et soit t_0 un élément de I.
Pour tout t dans I, la restriction de f à $[t_0, t]$ définit un arc paramétré rectifiable.
Notons $L(t)$ la longueur de cet arc.
On pose alors : $\forall t \leq t_0, S(t) = -L(t) \leq 0$, et $\forall t \geq t_0, S(t) = L(t) \geq 0$.
Autrement dit : $\forall t \in I, S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$.
On dit que l'application S est l'*abscisse curviligne* de l'arc (I, f), orienté dans le sens des t croissants, avec $M(t_0)$ comme origine.
$S(t)$ est appelé abscisse curviligne de $M(t)$. Celle de $M(t_0)$ est nulle.

Remarques

– Avec la même origine $M(t_0)$, on peut très bien orienter l'arc dans le sens des t décroissants, ce qui signifie choisir pour abscisse curviligne $S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$.
En fait l'abscisse curviligne oriente l'arc "dans le sens des abscisses curvilignes croissantes".
– L'arc (I, f) est orienté dans le sens des t croissants, et on prend $M(t_0)$ pour origine.
Pour tout t de l'intervalle I, on a : $S'(t) = \|f'(t)\| = \left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$.
– Si l'arc (I, f) ne possède que des points réguliers, ou si les points non réguliers sont isolés, alors l'application S est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur I.

Paramétrage de l'arc par l'abscisse curviligne

– Si l'arc (I, f) est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$ et s'il est régulier, alors l'application S est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur un intervalle J. L'arc paramétré $(J, g = f \circ S^{-1})$ et l'arc paramétré (I, f) sont alors deux représentations paramétriques du même arc géométrique.
Pour tout s de J, le point $M = f(t) = f \circ S^{-1}(s)$ est souvent noté $M(s)$.
L'abscisse curviligne définit donc une nouvelle représentation paramétrique de l'arc initial.
Quelque soit l'orientation choisie, l'arc est orienté dans le sens des "s croissants".

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.