Fonctions de plusieurs variables

Sommaire

I Applications continûment différentiables . . . 2
I.1 Applications coordonnées . . . 2
I.2 Applications partielles . . . 2
I.3 Continuité . . . 3
I.4 Dérivée suivant un vecteur . . . 4
I.5 Applications continûment différentiables . . . 5
I.6 Matrice Jacobienne . . . 6
I.7 DL d'ordre 1 d'une application C1 (complément) . . . 7
II Opérations sur les applications de classe C1 . . . 8
II.1 Combinaisons linéaires et produits . . . 8
II.2 Composition des applications de classe C1 . . . 8
II.3 Invariance de la différentielle (complément) . . . 9
III Difféomorphismes et changements de variables . . . 10
III.1 Définition et premières propriétés . . . 10
III.2 Caractérisation des C1-difféomorphismes . . . 10
III.3 Changements de variables classiques . . . 10
IV Applications de classe Ck . . . 12
IV.1 Définitions . . . 12
IV.2 Propriétés . . . 12
IV.3 Opérations sur les applications de classe Ck . . . 13
V Extremums locaux . . . 14
V.1 Définitions . . . 14
V.2 Points critiques . . . 14
VI Fonctions implicites . . . 15
VI.1 Fonctions implicites d'une variable . . . 15
VI.2 Fonctions implicites de deux variables . . . 15
VII Formes différentielles . . . 16
VII.1 Rappels . . . 16
VII.2 Définition d'une forme différentielle . . . 16
VII.3 Formes différentielles exactes, ou fermées . . . 17

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

I Applications continûment différentiables

I.1 Applications coordonnées

– Conformément au programme de la classe de PC, les applications considérées ici sont définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq p \leq 3$, et $1 \leq n \leq 3$.
– Les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis d'une norme, notée $\|\cdot\|$ dans les deux cas.
Avec par exemple $p = 3$, on pourra choisir de poser pour tout $M = (x, y, z)$ de Ω :

$$\|M\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

$$\text{ou } \|M\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{ou } \|M\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|)$$

– Avec par exemple $p = 2$ et $n = 3$, on notera :

$$\forall M = (x, y) \in \Omega : f(M) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

Les applications f_1, f_2, f_3, qui sont définies sur Ω et à valeurs réelles, sont appelées *applications coordonnées* de f.

I.2 Applications partielles

Définition

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, avec par exemple $p = 3$.
Soit $M = (a, b, c)$ un point de Ω, et $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.
L'application φ qui au réel t associe $\varphi(t) = f(M + tu) = f(a + t\alpha, b + t\beta, c + t\gamma)$ est appelée *application partielle* de f, au point M, suivant le vecteur u.

Remarques

– L'application φ est définie sur un certain ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.
– On note par exemple que $f(M + u) - f(M) = \varphi(1) - \varphi(0)$.

Cas particulier

Chacun des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$ définit une application partielle au point M, appelée j-ème application partielle φ_j en M, (avec $1 \leq j \leq p$).

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi_1(t) = f(M + te_1) = f(a + t, b, c) \\ \varphi_2(t) = f(M + te_2) = f(a, b + t, c) \\ \varphi_3(t) = f(M + te_3) = f(a, b, c + t) \end{cases}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

I.3 Continuité

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit A un point de Ω.
On dit que f est continue en A si $\lim\limits_{A} f = f(A)$, c'est-à-dire si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$ tel que $(\|M - A\| \leq \alpha \text{ et } M \in \Omega) \Rightarrow \|f(M) - f(A)\| \leq \varepsilon$

Proposition (Continuité et applications partielles)

L'application f est continue en un point A de Ω si et seulement si chacune de ses applications coordonnées $f_1, f_2, \ldots, f_p$ est continue en A.

Remarque

Cette propriété montre que pour la continuité, on peut toujours se ramener à des applications de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition (Continuité et applications partielles)

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Soit A un point de Ω. On suppose que f est continue en A.
Alors toute application partielle $t \mapsto \varphi(t) = f(A + tu)$ de f en A est continue en 0.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse !

Voici deux exemples classiques, à connaître :

- $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, avec $f(0,0) = 0$.
  On observe en effet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.
  En revanche $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2}$. L'application partielle de f suivant le vecteur $(1,1)$ n'est donc pas continue à l'origine, ce qui implique que f n'est pas continue au point $(0,0)$.
  On pouvait également noter que : $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$ (quantité qui ne tend pas vers 0 indépendamment de θ quand ρ tend vers 0 !).
- $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, avec $f(0,0) = 0$.
  On observe que $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.
  Plus généralement $\lim\limits_{t\to 0} f(ta,tb) = 0$, ce qui signifie que l'application partielle de f, suivant un vecteur quelconque (a,b), est continue à l'origine.
  En revanche $\lim\limits_{t\to 0} f(t^2,t) = \dfrac{1}{2}$.
  L'application f n'est donc pas continue au point $(0,0)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

I.4 Dérivée suivant un vecteur

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Soient A un point de Ω, et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.
Soit $t \mapsto \varphi(t) = f(M+tu)$ l'application partielle de f en M, suivant u.
On dit que l'application f admet pour dérivée le vecteur ℓ de $\mathbb{R}^p$ au point M suivant le vecteur u si l'application φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = \ell$.
Cela équivaut donc à $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(M+tu)-f(M)}{t} = \ell$. On note $D_u f(M) = \ell$.

Cas particulier : dérivées partielles premières

- Soit e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
  La dérivée de f en M suivant le vecteur e_j, si elle existe, est appelée j-ème dérivée partielle de f en M, et est notée $D_j f(M)$, ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M)$.
- Autrement dit, et par exemple si $n = 3$:
$$\begin{cases} D_1 f(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t,b,c)-f(a,b,c)}{t} \\ D_2 f(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(M) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a,b+t,c)-f(a,b,c)}{t} \\ D_3 f(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(M) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a,b,c+t)-f(a,b,c)}{t} \end{cases}$$
- Supposons que l'application f soit définie comme une fonction des trois variables x, y, z.
  On note alors souvent $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(M)$ les trois dérivées partielles de f en M.
- Si les dérivées partielles $D_j f(M)$ existent en tout point de l'ouvert Ω, on définit ainsi les applications $D_j : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ appelées applications dérivées partielles de f.
  Ces applications sont encore notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ si f est une fonction des variables x, y, z.

Proposition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
L'application f possède une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ en un point M de Ω si et seulement si chacune des applications coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ de f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en M.
Si par exemple $n = 3$, on a alors l'égalité : $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(M), \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(M), \dfrac{\partial f_3}{\partial x_j}(M)\right)$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Interprétation

La propriété précédente signifie que les coordonnées des dérivées partielles de f en un point M sont les dérivées partielles en M des applications coordonnées de f.

I.5 Applications continûment différentiables

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On dit que f est continûment différentiable, ou encore de classe $\mathcal{C}^1$, sur l'ouvert Ω si les applications dérivées partielles de f existent et sont continues sur Ω.

Proposition

L'application $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω si et seulement si ses applications coordonnées $f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Théorème

Soit f une application définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Alors f admet une dérivée en tout point M de Ω et suivant tout vecteur h non nul.

On a alors l'égalité : $D_h f(M) = \sum_{j=1}^{p} h_j D_j f(M) = \sum_{j=1}^{p} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M)$.

Définition

Avec les notations précédentes, l'application $h \to D_h f(M)$ est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

On l'appelle la différentielle de f au point M et on la note $\mathrm{d}f_M$.

Complément

On connait la notation classique (ici avec $p = 3$) suivante :

$$\mathrm{d}f_M = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M)\mathrm{d}x_j = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M)\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M)\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(M)\mathrm{d}x_3.$$

Cette notation rejoint l'écriture précédente si on définit dx_1, dx_2, dx_3 comme la base duale de la base canonique e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire si on pose :

$dx_1(h_1, h_2, h_3) = h_1$, $dx_2(h_1, h_2, h_3) = h_2$ et $dx_3(h_1, h_2, h_3) = h_3$.

Existence de dérivées partielles et continuité

– Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.

L'existence de dérivées partielles en un point M n'implique pas que f soit continue en M.

Pour s'en convaincre, on peut reprendre l'exemple de l'application f définie par :

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ à l'origine.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

On vérifie en effet que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)}{x} = 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)}{y} = 0$.
Pourtant, on sait que l'application f n'est pas continue en $(0,0)$.

– En revanche, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors f est continue sur Ω.

I.6 Matrice Jacobienne

Définition

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_1, \ldots, f_n$ ses applications coordonnées.
Soit M un point de Ω. On appelle *matrice jacobienne* de f en M, la matrice notée $J_f(M)$, appartenant à $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, de terme général $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(M)$

Exemple et remarques

– Si par exemple $n = p = 3$, alors $J_f(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(M) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(M) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(M) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(M) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(M) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(M) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(M) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(M) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}(M) \end{pmatrix}$

– Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, la i-ème ligne de $J_f(M)$ est formée des dérivées partielles successives, au point M, de l'application coordonnée f_i.

– La matrice jacobienne de f en M est la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f_M$ (c'est-à-dire de la différentielle de f en M) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$.
Autrement dit : $\forall h \in \mathbb{R}^p, [\mathrm{d}f_M(h)] = J_f(M)[h]$, où $[h]$ est la colonne des coordonnées de h.

– Si $p = n$, le déterminant $\det(J_f(M))$ appelé *jacobien* de f en M.
Il est souvent notée $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}$.

Gradient des applications numériques

– On considère ici des applications $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ (donc $n = 1$), de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout M de Ω le vecteur de composantes $D_j(f)(M)$ est appelé *gradient* de f en M et est noté $\mathrm{grad}_M(f)$.
Par exemple, si $p = 3$, $\mathrm{grad}_M(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(M) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(M) \end{pmatrix}$

– Pour tout h de $\mathbb{R}^p$, on a : $\mathrm{d}f_M(h) = J_f(M)[h] = < \mathrm{grad}_M(f), h >$ (le résultat est un réel).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.