Fonctions de plusieurs variables

Sommaire

I Applications continûment différentiables

I.1 Applications coordonnées

- Conformément au programme de la classe de PC, les applications considérées ici sont définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq p \leq 3$, et $1 \leq n \leq 3$.
- Les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis d'une norme, notée $\|\cdot\|$ dans les deux cas.
  Avec par exemple $p = 3$, on pourra choisir de poser pour tout $M = (x, y, z)$ de Ω :

$$\|M\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

$$\text{ou } \|M\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{ou } \|M\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|)$$

- Avec par exemple $p = 2$ et $n = 3$, on notera :

$$\forall M = (x, y) \in \Omega : f(M) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

  Les applications f_1, f_2, f_3, qui sont définies sur Ω et à valeurs réelles, sont appelées *applications coordonnées* de f.

I.2 Applications partielles

Définition

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, avec par exemple $p = 3$.
Soit $M = (a, b, c)$ un point de Ω, et $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.
L'application φ qui au réel t associe $\varphi(t) = f(M + tu) = f(a + t\alpha, b + t\beta, c + t\gamma)$ est appelée *application partielle* de f, au point M, suivant le vecteur u.

Remarques

- L'application φ est définie sur un certain ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.
- On note par exemple que $f(M + u) - f(M) = \varphi(1) - \varphi(0)$.

Cas particulier

Chacun des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$ définit une application partielle au point M, appelée j-ème application partielle φ_j en M, (avec $1 \leq j \leq p$).

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi_1(t) = f(M + te_1) = f(a + t, b, c) \\ \varphi_2(t) = f(M + te_2) = f(a, b + t, c) \\ \varphi_3(t) = f(M + te_3) = f(a, b, c + t) \end{cases}$$

I.3 Continuité

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit A un point de Ω.
On dit que f est continue en A si $\lim\limits_{A} f = f(A)$, c'est-à-dire si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$ tel que $(\|M - A\| \leq \alpha$ et $M \in \Omega) \Rightarrow \|f(M) - f(A)\| \leq \varepsilon$

Proposition (Continuité et applications partielles)

L'application f est continue en un point A de Ω si et seulement si chacune de ses applications coordonnées $f_1, f_2, \ldots, f_p$ est continue en A.

Remarque

Cette propriété montre que pour la continuité, on peut toujours se ramener à des applications de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition (Continuité et applications partielles)

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Soit A un point de Ω. On suppose que f est continue en A.
Alors toute application partielle $t \mapsto \varphi(t) = f(A + tu)$ de f en A est continue en 0.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse !

Voici deux exemples classiques, à connaître :

◇ $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, avec $f(0, 0) = 0$.
On observe en effet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$.
En revanche $\lim\limits_{t \to 0} f(t, t) = \dfrac{1}{2}$. L'application partielle de f suivant le vecteur $(1, 1)$ n'est donc pas continue à l'origine, ce qui implique que f n'est pas continue au point $(0, 0)$.
On pouvait également noter que : $f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta$ (quantité qui ne tend pas vers 0 indépendamment de θ quand ρ tend vers 0 !).

◇ $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, avec $f(0, 0) = 0$.
On observe que $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$.
Plus généralement $\lim\limits_{t \to 0} f(ta, tb) = 0$, ce qui signifie que l'application partielle de f, suivant un vecteur quelconque (a, b), est continue à l'origine.
En revanche $\lim\limits_{t \to 0} f(t^2, t) = \dfrac{1}{2}$.
L'application f n'est donc pas continue au point $(0, 0)$.

I.4 Dérivée suivant un vecteur

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Soient A un point de Ω, et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

Soit $t \mapsto \varphi(t) = f(M + tu)$ l'application partielle de f en M, suivant u.

On dit que l'application f admet pour dérivée le vecteur ℓ de $\mathbb{R}^p$ au point M suivant le vecteur u si l'application φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = \ell$.

Cela équivaut donc à $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(M + tu) - f(M)}{t} = \ell$. On note $D_u f(M) = \ell$.

Cas particulier : dérivées partielles premières

- Soit e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
  La dérivée de f en M suivant le vecteur e_j, si elle existe, est appelée j-ème dérivée partielle de f en M, et est notée $D_j f(M)$, ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M)$.
- Autrement dit, et par exemple si $n = 3$:

$$\begin{cases} D_1 f(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+t, b, c) - f(a, b, c)}{t} \\ D_2 f(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(M) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a, b+t, c) - f(a, b, c)}{t} \\ D_3 f(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(M) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a, b, c+t) - f(a, b, c)}{t} \end{cases}$$

- Supposons que l'application f soit définie comme une fonction des trois variables x, y, z.
  On note alors souvent $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(M)$ les trois dérivées partielles de f en M.
- Si les dérivées partielles $D_j f(M)$ existent en tout point de l'ouvert Ω, on définit ainsi les applications $D_j : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ appelées applications dérivées partielles de f.
  Ces applications sont encore notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ si f est une fonction des variables x, y, z.

Proposition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

L'application f possède une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ en un point M de Ω si et seulement si chacune des applications coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ de f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en M.

Si par exemple $n = 3$, on a alors l'égalité : $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(M), \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(M), \dfrac{\partial f_3}{\partial x_j}(M)\right)$

Interprétation

La propriété précédente signifie que les coordonnées des dérivées partielles de f en un point M sont les dérivées partielles en M des applications coordonnées de f.

I.5 Applications continûment différentiables

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
On dit que f est continûment différentiable, ou encore de classe $\mathcal{C}^1$, sur l'ouvert Ω si les applications dérivées partielles de f existent et sont continues sur Ω.

Proposition

L'application $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω si et seulement si ses applications coordonnées $f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Théorème

Soit f une application définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
Alors f admet une dérivée en tout point M de Ω et suivant tout vecteur h non nul.
On a alors l'égalité : $D_h f(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j D_j f(M) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(M)$.

Définition

Avec les notations précédentes, l'application $h \to D_h f(M)$ est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
On l'appelle la différentielle de f au point M et on la note $\mathrm{d}f_M$.

Complément

On connait la notation classique (ici avec $p = 3$) suivante :

$$\mathrm{d}f_M = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M)\mathrm{d}x_j = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M)\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M)\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(M)\mathrm{d}x_3.$$

Cette notation rejoint l'écriture précédente si on définit dx_1, dx_2, dx_3 comme la base duale de la base canonique e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire si on pose :

$dx_1(h_1, h_2, h_3) = h_1$, $dx_2(h_1, h_2, h_3) = h_2$ et $dx_3(h_1, h_2, h_3) = h_3$.

Existence de dérivées partielles et continuité

– Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.
L'existence de dérivées partielles en un point M n'implique pas que f soit continue en M.
Pour s'en convaincre, on peut reprendre l'exemple de l'application f définie par :
$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ à l'origine.

On vérifie en effet que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)}{x} = 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)}{y} = 0$.
Pourtant, on sait que l'application f n'est pas continue en $(0,0)$.

– En revanche, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors f est continue sur Ω.

I.6 Matrice Jacobienne

Définition

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_1, \ldots, f_n$ ses applications coordonnées.
Soit M un point de Ω. On appelle *matrice jacobienne* de f en M, la matrice notée $J_f(M)$, appartenant à $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, de terme général $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(M)$

Exemple et remarques

– Si par exemple $n = p = 3$, alors $J_f(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(M) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(M) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(M) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(M) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(M) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(M) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(M) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(M) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}(M) \end{pmatrix}$

– Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, la i-ème ligne de $J_f(M)$ est formée des dérivées partielles successives, au point M, de l'application coordonnée f_i.

– La matrice jacobienne de f en M est la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f_M$ (c'est-à-dire de la différentielle de f en M) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$.
Autrement dit : $\forall h \in \mathbb{R}^p, [\,\mathrm{d}f_M(h)] = J_f(M)[h]$, où $[h]$ est la colonne des coordonnées de h.

– Si $p = n$, le déterminant $\det(J_f(M))$ appelé *jacobien* de f en M.
Il est souvent notée $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}$.

Gradient des applications numériques

– On considère ici des applications $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ (donc $n = 1$), de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout M de Ω le vecteur de composantes $D_j(f)(M)$ est appelé *gradient* de f en M et est noté $\mathrm{grad}_M(f)$.

Par exemple, si $p = 3$, $\mathrm{grad}_M(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(M) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(M) \end{pmatrix}$

– Pour tout h de $\mathbb{R}^p$, on a : $\mathrm{d}f_M(h) = J_f(M)[h] =< \mathrm{grad}_M(f), h >$ (le résultat est un réel).