I Applications continûment différentiables

I.1 Applications coordonnées

– Conformément au programme de la classe de PC, les applications considérées ici sont définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq p \leq 3$, et $1 \leq n \leq 3$.
– Les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis d'une norme, notée $\|\cdot\|$ dans les deux cas.
Avec par exemple $p = 3$, on pourra choisir de poser pour tout $M = (x, y, z)$ de Ω :

$$\|M\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

$$\text{ou } \|M\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{ou } \|M\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|)$$

– Avec par exemple $p = 2$ et $n = 3$, on notera :

$$\forall M = (x, y) \in \Omega : f(M) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

Les applications f_1, f_2, f_3, qui sont définies sur Ω et à valeurs réelles, sont appelées *applications coordonnées* de f.

I.2 Applications partielles

Définition

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, avec par exemple $p = 3$.
Soit $M = (a, b, c)$ un point de Ω, et $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.
L'application φ qui au réel t associe $\varphi(t) = f(M + tu) = f(a + t\alpha, b + t\beta, c + t\gamma)$ est appelée *application partielle* de f, au point M, suivant le vecteur u.

Remarques

– L'application φ est définie sur un certain ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.
– On note par exemple que $f(M + u) - f(M) = \varphi(1) - \varphi(0)$.

Cas particulier

Chacun des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$ définit une application partielle au point M, appelée j-ème application partielle φ_j en M, (avec $1 \leq j \leq p$).

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi_1(t) = f(M + te_1) = f(a + t, b, c) \\ \varphi_2(t) = f(M + te_2) = f(a, b + t, c) \\ \varphi_3(t) = f(M + te_3) = f(a, b, c + t) \end{cases}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

I.3 Continuité

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit A un point de Ω.
On dit que f est continue en A si $\lim\limits_{A} f = f(A)$, c'est-à-dire si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$ tel que $(\|M - A\| \leq \alpha \text{ et } M \in \Omega) \Rightarrow \|f(M) - f(A)\| \leq \varepsilon$

Proposition (Continuité et applications partielles)

L'application f est continue en un point A de Ω si et seulement si chacune de ses applications coordonnées $f_1, f_2, \ldots, f_p$ est continue en A.

Remarque

Cette propriété montre que pour la continuité, on peut toujours se ramener à des applications de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition (Continuité et applications partielles)

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Soit A un point de Ω. On suppose que f est continue en A.
Alors toute application partielle $t \mapsto \varphi(t) = f(A + tu)$ de f en A est continue en 0.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse !

Voici deux exemples classiques, à connaître :

- $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, avec $f(0,0) = 0$.
  On observe en effet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.
  En revanche $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2}$. L'application partielle de f suivant le vecteur $(1,1)$ n'est donc pas continue à l'origine, ce qui implique que f n'est pas continue au point $(0,0)$.
  On pouvait également noter que : $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$ (quantité qui ne tend pas vers 0 indépendamment de θ quand ρ tend vers 0 !).
- $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, avec $f(0,0) = 0$.
  On observe que $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.
  Plus généralement $\lim\limits_{t\to 0} f(ta,tb) = 0$, ce qui signifie que l'application partielle de f, suivant un vecteur quelconque (a,b), est continue à l'origine.
  En revanche $\lim\limits_{t\to 0} f(t^2,t) = \dfrac{1}{2}$.
  L'application f n'est donc pas continue au point $(0,0)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.