II Orthogonalité

Dans ce paragraphe, E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $< x, y > = 0$.

Remarques

- La définition est symétrique en x, y car $< y, x > = \overline{< x, y >}$.
- Le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

  A fortiori, le seul vecteur u qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est $u = 0$.

Définition

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que cette famille est *orthogonale* si pour tous indices i, j distincts de I, $< u_i, u_j > = 0$, c'est-à-dire si les vecteurs de la famille sont orthogonaux deux à deux.
Si de plus les u_i sont unitaires, la famille est dite *orthonormée* ou *orthonormale*.

Remarques

- La famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormée $\Leftrightarrow$, pour tous indices i, j de I :

  $< u_i, u_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (*Notation de Kronecker*)
- Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls alors c'est une famille libre.
- Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orhonormée et est une base de E, on dit qu'elle constitue une *base orthonormée* (b.o.n.) de E.
- Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthogonale de E.

  Alors $\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2$ (*Théorème de Pythagore*)

  La réciproque n'est vraie que si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

  Autrement dit, deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel sont orthogonaux si et seulement s'ils vérifient $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.