

II Orthogonalité

Dans ce paragraphe, E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

II.1 Vecteurs orthogonaux

Définition

|| Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.

Remarques

- La définition est symétrique en x, y car $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
- Le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
A fortiori, le seul vecteur u qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est $u = 0$.

Définition

|| Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .
|| On dit que cette famille est *orthogonale* si pour tous indices i, j distincts de I , $\langle u_i, u_j \rangle = 0$,
|| c'est-à-dire si les vecteurs de la famille sont orthogonaux deux à deux.
|| Si de plus les u_i sont unitaires, la famille est dite *orthonormée* ou *orthonormale*.

Remarques

- La famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormée \Leftrightarrow , pour tous indices i, j de I :
$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{Notation de Kronecker})$$
- Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls alors c'est une famille libre.
- Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormée et est une base de E , on dit qu'elle constitue une *base orthonormée* (b.o.n.) de E .
- Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthogonale de E .
Alors $\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2$ (Théorème de Pythagore)
La réciproque n'est vraie que si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Autrement dit, deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel sont orthogonaux si et seulement s'ils vérifient $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.