III Endomorphismes symétriques ou orthogonaux

Dans cette partie E est *euclidien*, c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie.

III.1 Adjoint d'un endomorphisme

Proposition *(Représentation des formes linéaires)*

Soit a un vecteur de E. L'application $x \mapsto f_a(x) =< a, x >$ est une forme linéaire sur E dont le noyau est E si $a = 0$ et l'hyperplan $(\mathbb{K}a)^\perp$ si a est non nul.

Réciproquement, si f est une forme linéaire sur E , il existe un vecteur unique a de E tel que $f = f_a$, c'est-à-dire tel que : $\forall x \in E, f(x) =< a, x >$.

L'application $a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de E sur son dual E^*.

Proposition et définition *(Adjoint d'un endomorphisme)*

Soit f un endomorphisme de E.

Il existe un unique endomorphisme g de E tel que $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y >=< x, g(y) >$.

On le note $g = f^*$, et on l'appelle l'*adjoint* de f.

Proposition *(Propriétés de l'adjonction)*

Pour tous endomorphismes f et g de E, et pour tous réels α et β :

$$\begin{cases} f^{**} = f & \text{L'adjonction est donc un mécanisme involutif} \\ (\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^* & \text{L'adjonction est un endomorphisme de } \mathcal{L}(E) \\ (g \circ f)^* = f^* \circ g^* & \end{cases}$$

III.2 Endomorphismes orthogonaux

Proposition et définition *(Endomorphismes orthogonaux)*

Soit f un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f conserve la norme : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- f conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), f(y) >=< x, y >$.
- f transforme toute b.o.n. de E en une b.o.n. de E.
- f transforme au moins une b.o.n. de E en une b.o.n. de E.
- f est un automorphisme de E et $f^* = f^{-1}$.

Si f vérifie ces propriétés, on dit que f est un *endomorphisme orthogonal* de E (ou encore une *isométrie vectorielle* de E).

Définition et proposition *(Le groupe orthogonal)*

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

C'est un groupe pour la loi $\circ$, appelé *groupe orthogonal* de E.