



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On considère l'ensemble  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Montrer que  $\mathcal{D}$  ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de  $\mathbb{R}$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On considère une famille finie d'ensembles distincts deux à deux.

Montrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

En utilisant uniquement l'axiome de la borne supérieure dans  $\mathbb{R}$ , montrer que pour tout réel  $a > 0$  et pour tout réel  $x$ , il existe un entier naturel  $n$  tel que  $na > x$ .

On exprime cette propriété en disant que  $\mathbb{R}$  est *archimédien*.

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $a, b, c$  trois réels du segment  $[0, 1]$ .

Montrer que le minimum de  $a(1 - b)$ ,  $b(1 - c)$ ,  $c(1 - a)$  est inférieur ou égal à  $\frac{1}{4}$ .

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel : on raisonnera par l'absurde et on considérera l'ensemble  $A$  des  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  tels que  $n\sqrt{2}$  soit entier.