

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que pour toutes parties  $A$  et  $B$  disjointes de  $E$ ,  $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ .

Montrer que  $f(\emptyset) = 0$ .

Prouver que pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,  $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $f(\overset{\perp}{f}(B) \cap A) = B \cap f(A)$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E$ .

Montrer que  $f$  est bijective  $\Leftrightarrow$  pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$  (on note  $\overline{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .)

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $E$  un ensemble non vide, et  $A, B$  deux parties de  $E$ .

On note  $[A, A \cup B] = \{X \subset E, A \subset X \subset A \cup B\}$  et  $[A \cap B, B] = \{Y \subset E, A \cap B \subset Y \subset B\}$ .

On définit  $f : [A, A \cup B] \rightarrow [A \cap B, B]$  par  $f(X) = X \cap B$ .

On définit  $g : [A \cap B, B] \rightarrow [A, A \cup B]$  par  $g(Y) = Y \cup A$ .

Montrer que  $f$  et  $g$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

On définit l'application  $g : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  par :  $\forall Y \subset F, g(Y) = \overset{\perp}{f}(Y)$ .

1. Montrer que  $g$  est injective  $\Leftrightarrow f$  est surjective.
2. Montrer que  $g$  est surjective  $\Leftrightarrow f$  est injective.

**EXERCICE 6** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Montrer l'équivalence de :

- (a)  $f$  est injective
- (b) Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .