Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans E et $\mathcal{S} = \{X \subset E,\ \overset{-1}{f}(f(X)) = X\}$.

1. Soit A une partie quelconque de E. Montrer que $\overset{-1}{f}(f(A))$ appartient à $\mathcal{S}$.
2. Montrer que toute intersection ou réunion d'éléments de $\mathcal{S}$ est encore élément de $\mathcal{S}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie A de E, $\overset{-1}{f}(f(A)) \supset A$.
2. Montrer que pour toute partie B de F, $f(\overset{-1}{f}(B)) = f(E) \cap B$.
3. Prouver que f est injective $\Leftrightarrow \forall\, A \subset E,\ \overset{-1}{f}(f(A)) = A$.
4. Prouver que f est surjective $\Leftrightarrow \forall\, B \subset F,\ f(\overset{-1}{f}(B)) = B$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E.
On considère l'application f, de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1. Montrer que f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit A une partie d'un ensemble E.

On lui associe l'application χ_A, de E vers $\{0,1\}$, définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Montrer que $A \mapsto \chi_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$.