

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On définit sur \mathbb{R} la relation : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$.

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Déterminer, pour tout réel x , le cardinal de la classe d'équivalence de x .

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans \mathbb{R}^2 , la relation $(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow xy = zt$ est-elle une relation d'équivalence ?

Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?

La relation $(x, y)\mathcal{S}(z, t) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = zt \\ xz \geq 0 \end{cases}$ est-elle une relation d'équivalence ?

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans le plan \mathcal{P} d'origine O , la relation " $MRN \Leftrightarrow O, M, N$ sont alignés" est-elle une relation d'équivalence ? Même question si on remplace \mathcal{P} par $\mathcal{P} - \{O\}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $(m, n)\mathcal{R}(p, q) \Leftrightarrow mq = np$. Est-ce une relation d'équivalence ?

Et si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par \mathbb{N}^2 ?

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit \mathcal{M} une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que : $\forall X, Y \in \mathcal{M}, \exists Z \in \mathcal{M}, Z \subset X \cap Y$.

On définit une relation \mathcal{R} sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}, A \cap X = B \cap X$.

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble fini.

On définit une relation \mathcal{R} sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \text{card}(A \Delta B)$ est pair.

\mathcal{R} est-elle une relation d'équivalence ?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Se souvenir que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ définit toujours une relation d'équivalence.
2. Constater que $x\mathcal{R}a \Leftrightarrow (x = a) \text{ ou } (P(x) = x^2 + ax + a^2 - 3 = 0)$. Discuter suivant a , et se demander si les éléments obtenus sont vraiment différents. On pourra faire d'une part une démonstration purement algébrique, d'autre part une démonstration graphique.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

\mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont des hyperboles et les axes $x = 0$ et $y = 0$.

La relation \mathcal{S} n'est pas d'équivalence car elle n'est pas transitive.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La relation \mathcal{R} n'est pas transitive.

Si on remplace \mathcal{P} par $\mathcal{P} - \{O\}$, Alors \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont les demi-droites issues (et privées) de l'origine.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

\mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Cela n'est plus vrai si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par \mathbb{N}^2 .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente : il faut utiliser l'hypothèse sur \mathcal{M} .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente. Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$, il pourra être de commode de noter a, b, c, ab, ac, bc, abc les cardinaux des sous-ensembles délimités par les ensembles A, B, C dans leur configuration la plus générale (faire un dessin.)

Montrer alors que $\text{Card}(A\Delta B) + \text{Card}(B\Delta C)$ diffère de $\text{Card}(A\Delta C)$ par un entier pair.