Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive.

On définit sur E la relation : $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et symétrique sur un ensemble E.

On définit sur E la relation :

$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow$ il existe une suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de E (avec $n \geq 1$) tels que $x_0 = x$, $x_n = y$, et $x_p\mathcal{R}x_{p+1}$ pour tout p de $\{0, \ldots, n-1\}$.

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'équivalence sur un ensemble E.

On définit la relation $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{S}\circ\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\, z, x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{S}y$.

Montrer que $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence $\Leftrightarrow \mathcal{S}\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}\circ\mathcal{S}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence $\Leftrightarrow$:

- $\mathcal{R}$ est réflexive
- Pour tous éléments x, y, z de E : $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow z\mathcal{R}x$.