

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On définit une suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = \cos \theta$ , et pour  $n \geq 2$  :  $u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2}$ .  
Calculer  $u_n$ , pour tout entier  $n$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $n$  un entier naturel.

- Combien l'équation  $x + y = n$  possède-t-elle de couples solutions  $(x, y)$  dans  $\mathbb{N}^2$  ?
- Combien l'équation  $x + y + z = n$  possède-t-elle de triplets solutions  $(x, y, z)$  dans  $\mathbb{N}^3$  ?
- Généraliser au calcul du nombre de  $(p + 1)$ -uplets solutions de  $x_0 + x_1 + \dots + x_p = n$ .  
Pour cette question, on donnera deux démonstrations, l'une qui utilise une récurrence et l'autre qui s'appuie sur un calcul de dénombrement.

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  n'est pas un entier.

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$   
(le nombre 2 apparaissant  $n$  fois sous la racine).

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier  $n$ , on a  $u_n = \cos(n\theta)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Le nombre de solutions dans  $\mathbb{N}^2$  de  $x + y = n$  est  $n + 1$ .
- Le nombre de solutions dans  $\mathbb{N}^3$  de  $x + y + z = n$  est  $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ .
- Le nombre de solutions dans  $\mathbb{N}^p$  de  $x_0 + x_1 + \dots + x_p = n$  est  $C_{n+p}^n$ .
- Pour le dénombrement, il faut identifier chaque solution à un mot.  
Par exemple la solution  $(3, 0, 2, 1)$  de  $x + y + z + t = 6$  est associée au mot  $***|**|*$ .  
De même la solution  $(0, 1, 5, 0)$  est associée à  $|*|*****|$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

L'idée est que  $u_n$  est le quotient d'un entier impair par un entier pair (donc n'est pas entier!)

On le vérifie par récurrence sur  $n$ .

- Si  $n$  est impair, on passe facilement du rang  $n - 1$  au rang  $n$ .
- Si  $n$  est pair, il faut décomposer la somme  $u_n$  en la sous-somme des termes de dénominateur impair et celle des termes de dénominateur pair. Dans celle-ci, il est possible d'utiliser la propriété au rang  $n/2$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Soit  $u_n$  l'expression qu'il s'agit ici de calculer.

On note que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ .