Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Calculer le nombre de couples (A, B) tels que :

1. $A \subset B \subset E$ (on pourra donner deux démonstrations.)
2. $A \subset E$, $B \subset E$, $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \subset E$, $B \subset E$, $A \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

– Combien existe-t-il de partitions (A, B) de E en deux parties ? $(A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset.)$
– Combien existe-t-il de *recouvrements* (A, B) de E en deux parties ? $(A \cup B = E.)$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Calculer le nombre de triplets (A, B, C) tels que $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Calculer $\displaystyle\sum_{X,Y \subset E} \mathrm{card}(X \cap Y)$ et $\displaystyle\sum_{X,Y \subset E} \mathrm{card}(X \cup Y)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal np.

Calculer le nombre de partitions de E en n parties de p éléments.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Discuter suivant le cardinal k de A. Le nombre de solutions au problème posé est 3^n. Autre idée : il y a autant de solutions qu'il y a d'applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.
2. Compte tenu de la question précédente, le nombre solutions est $4^n - 3^n$.
3. Etant donné $A \subset E$, il y a autant de parties contenant A que de parties disjointes de A. Le nombre de solutions à la question posée est 3^n.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Se donner une partition (A, B), c'est se donner A.
– Discuter suivant le cardinal k de A. Le nombre de recouvrements est 3^n.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Il revient au même de résoudre $\begin{cases} A \cup B = X \\ X \cup C = E \end{cases}$, où $X \subset E$.

Discuter suivant $\text{Card}\, X = k$ en utilisant l'exercice précédent.

Le nombre de solutions est 7^n.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– $A = \sum\limits_{X,Y \subset E} \text{Card}\,(X \cap Y) = \sum\limits_{X,Y \subset E} \text{Card}\,(\overline{X} \cap Y) = \sum\limits_{X,Y \subset E} \text{Card}\,(X \cap \overline{Y}) = \sum\limits_{X,Y \subset E} \text{Card}\,(\overline{X} \cap \overline{Y})$
  On trouve finalement $A = n4^{n-1}$.
– $B = \sum\limits_{X,Y \subset E} \text{Card}\,(X \cup Y) = \sum\limits_{X,Y \subset E} \text{Card}\,(\overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}) = \sum\limits_{X,Y \subset E} (n - \text{Card}\,(X \cap Y)) = 3n4^{n-1}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On commence par étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les n-uples $X = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ formés de parties de E deux à deux disjointes, de cardinal p et de réunion E.

Le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ est $\prod\limits_{k=1}^{n} \text{C}_{kp}^{p} = \dfrac{(np)!}{(p!)^n}$.

On note ensuite que l'application $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \mapsto \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une surjection de $\mathcal{F}$ sur l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les partitions de E en n parties ayant chacune p éléments.

Le principe des bergers donne alors le nombre de partitions : $\dfrac{(np)!}{n!(p!)^n}$.