Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Calculer le nombre de couples (A, B) tels que :

1. $A \subset B \subset E$ (on pourra donner deux démonstrations.)
2. $A \subset E$, $B \subset E$, $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \subset E$, $B \subset E$, $A \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

– Combien existe-t-il de partitions (A, B) de E en deux parties ? ($A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.)

– Combien existe-t-il de *recouvrements* (A, B) de E en deux parties ? ($A \cup B = E$.)

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Calculer le nombre de triplets (A, B, C) tels que $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Calculer $\sum_{X,Y \subset E} \text{card}(X \cap Y)$ et $\sum_{X,Y \subset E} \text{card}(X \cup Y)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini de cardinal np.

Calculer le nombre de partitions de E en n parties de p éléments.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Discuter suivant le cardinal k de A. Le nombre de solutions au problème posé est 3^n.
   Autre idée : il y a autant de solutions qu'il y a d'applications de E dans $\{1,2,3\}$.
2. Compte tenu de la question précédente, le nombre solutions est $4^n - 3^n$.
3. Etant donné $A \subset E$, il y a autant de parties contenant A que de parties disjointes de A. Le nombre de solutions à la question posée est 3^n.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– Se donner une partition (A, B), c'est se donner A.
– Discuter suivant le cardinal k de A. Le nombre de recouvrements est 3^n.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Il revient au même de résoudre $\begin{cases} A \cup B = X \\ X \cup C = E \end{cases}$, où $X \subset E$.

Discuter suivant $\operatorname{Card} X = k$ en utilisant l'exercice précédent.

Le nombre de solutions est 7^n.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– $A = \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) = \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(\overline{X} \cap Y) = \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap \overline{Y}) = \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(\overline{X} \cap \overline{Y})$
  On trouve finalement $A = n4^{n-1}$.
– $B = \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cup Y) = \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(\overline{X \cap Y}) = \sum_{X,Y \subset E} (n - \operatorname{Card}(X \cap Y)) = 3n4^{n-1}$

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On commence par étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les n-uples $X = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ formés de parties de E deux à deux disjointes, de cardinal p et de réunion E.

Le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ est $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{kp}^{p} = \dfrac{(np)!}{(p!)^n}$.

On note ensuite que l'application $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \mapsto \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une surjection de $\mathcal{F}$ sur l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les partitions de E en n parties ayant chacune p éléments.

Le principe des bergers donne alors le nombre de partitions : $\dfrac{(np)!}{n!(p!)^n}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.