Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ est un entier.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient m et n des entiers naturels.

1. Montrer que si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnnel.
2. Montrer que si m et n ne sont pas des carrés, alors $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ n'est pas rationnel.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

1. Montrer que pour tous a, b dans $\mathbb{Q}$, $a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$.
2. Montrer que : $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$, $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit A l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont le développement décimal réduit ne contient pas 9. Montrer que A est un ensemble fermé.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Posons $a = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$.

Utiliser $a^3 + b^3 = 90$ et vérifier que $ab = 7$.

En déduire que $x = a + b$ est racine d'un polynôme de degré 3. On trouve $x = 6$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Supposer par l'absurde que n n'est pas un carré et que $\sqrt{n}$ est rationnel $\frac{a}{b}$.
   Raisonner sur les facteurs premiers de n, a et b.
2. Par l'absurde, supposer que $r = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ est rationnel.
   En déduire que $\sqrt{mn}$ est rationnel et utiliser la question précédente.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Facile en utilisant la première question de l'exercice précédent.
2. Chercher à isoler $\sqrt{6}$ par exemple. On utilise encore la question 1 de l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Supposer que $x = \sqrt[3]{5} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et utiliser $5 = (x - \sqrt{2})^3$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soit (v_n) une suite de A, convergente vers ℓ. Il faut montrer $\ell \in A$.

Pour cela vérifier que pour tout entier k, la suite $a_{n,k}$ des k-ièmes décimales des v_n successifs est stationnaire en une valeur b_k.

Montrer que $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$, qui est bien un élément de A.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.