

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

1. Etudier l'existence et le signe des racines réelles de $P = (m - 2)x^2 + (2m + 3)x + m + 2$.
2. Même question avec $P = (m - 2)x^2 - (2m - 5)x + m + 3$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2$.
2. $\sqrt{x - 9} + \sqrt{x - 24} = x$.
3. $\sqrt{x^2 + mx - 1} = -x + 3m$ (avec m réel).

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Résoudre $\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 4$ dans \mathbb{R} .

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Résoudre le système $\begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases}$ dans \mathbb{R} .

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tous réels positifs a, b : $(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $2x + 1 < \sqrt{x^2 + 8}$.
2. $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2$.

EXERCICE 7 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions réelles de l'équation $(E_m) : x - 1 = \sqrt[4]{x^4 + x^2 + m}$.

On note $\varphi(m)$ l'unique solution de cette équation quand elle existe.

Etudier l'application φ (monotonie, continuité, limites aux bornes).

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Si $m = 2$, une seule racine, négative. Si $m \neq 2$, $\Delta = 12m + 25$.
Si deux racines réelles distinctes α, β , former $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$, et discuter.
2. Si $m = 2$, une seule racine. Si $m \neq 2$, $\Delta = 49 - 24m$. Continuer comme ci-dessus.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. La seule solution de (E) est $x = 23$.
2. Pour $x \geq 24$, on a $\sqrt{x-24} < \sqrt{x-9}$. Il n'y a pas de solution sur \mathbb{R} .
3. Si $m = 0$, il n'y a pas de solution.
Si $m \neq 0$, la seule solution est $x_m = \frac{9m^2 + 1}{7m}$, si $m \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right[\cup \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, +\infty\right[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Poser $X = \sqrt[4]{41+x}$ et $Y = \sqrt[4]{41-x}$. On a $X^4 + Y^4 = 82$ et $S = X + Y = 4$.

Exprimer $X^4 + Y^4$ en fonction de $S = X + Y$ et de $P = XY$.

En déduire $P = 29$ ou $P = 3$. Les deux seules solutions sont $x = -40$ et $x = 40$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Procéder par somme et différence.

- Si $y = x$, on trouve $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{10}$. Si $y = -x$, on trouve $x = 0$ ou $x = \pm 2$.
- Si $y \neq \pm x$, on obtient $x + y = \varepsilon$ et $xy = -3$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Discuter suivant ε .
- Finalement, on trouve 9 couples solutions

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Deux factorisations très simples suffisent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. L'ensemble des solutions est $] -\infty, 1[$.
2. L'ensemble des solutions est $]0, 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- On a $(E_m) \Leftrightarrow (f_m(x) = 0 \text{ et } x \geq 1)$, avec $f_m(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x + m - 1$.

Montrer que f_m est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

(E_m) n'a pas de solution réelle si $m > -2$, et a une seule solution $\varphi(m) \geq 1$ si $m \leq -2$.

On étudie ensuite φ et φ^{-1} . On trouve $\lim_{m \rightarrow -\infty} \varphi(m) = +\infty$. et $\varphi(m) \sim -\left(\frac{m}{4}\right)^{1/3}$.