Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Résoudre $\mathrm{E}(2x-1) = \mathrm{E}(x-4)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier $\lim\limits_{\infty} [u_n]$ si $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}([x] + [2x] + \cdots + [nx])$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient x un réel, et n un entier naturel non nul.
On note $t \mapsto [t]$ l'opération "partie entière".

1. Montrer que pour tout entier relatif k, $\left[\dfrac{x+k}{n}\right] = \left[\dfrac{[x]+k}{n}\right]$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x+k}{n}\right] = [x]$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que tout rationnel r de $[0,1[$ s'écrit d'une manière unique :

$$r = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{n!} + \cdots$$

les entiers a_i (nuls à partir d'un certain rang) vérifiant $0 \leq a_i < i$.
Mettre sous cette forme le rationnel $\dfrac{5}{7}$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Calculer $\lambda = \inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \sup\limits_{x\in[0,1]} |x^2 + tx| \right\}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $k = [x]$, et discuter suivant le placement de x par rapport à $k + \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} [u_n] = \ell$:
- Si ℓ n'est pas entier, la suite $([u_n])$ est stationnaire donc convergente en $[\ell]$.
- Si ℓ est un entier, alors plusieurs cas sont possibles...,

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $kx \leq [kx] < kx + 1$. On trouve $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{x}{2}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Si $q = \left[\dfrac{x+k}{n}\right]$, $qn - k \leq x < (q+1)n - k \Rightarrow qn - k \leq [x] < (q+1)n - k \Rightarrow \ldots$
2. On suppose d'abord que $x \in Z$. Soit $x = qn + r$ la division de x par n.
   Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, discuter suivant la position de $r + k$ par rapport à n.
   Si x est un réel quelconque, utiliser la question (1).

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

- On commence par l'unicité des (a_n). On note : $s_n = \sum_{k=2}^{n-1} \dfrac{a_k}{k!}$ et $r_n = \sum_{k\geq n+1} \dfrac{a_k}{k!}$.
  Prouver $a_n = [n!(r - s_n)] = [n!r] - n!s_n$.
- Réciproquement, on a $0 \leq a_n \leq n - 1$ (récurrence). Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N!r$ soit entier.
  Prouver que pour tout $n \geq N$, on a $a_{n+1} = 0$, donc $s_{n+1} = r$.
- La décomposition de $r = \dfrac{5}{7}$ est : $\dfrac{5}{7} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{4}{6!} + \dfrac{2}{7!}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

- Traiter le cas $t \geq 0$.
- Si $t < 0$, étudier $x \mapsto |x(x + t)|$.
  Il apparaît alors les cas $t \leq -2$, $-2 \leq t \leq -1$, $-1 \leq t \leq 0$.
- La borne inférieure λ est obtenue en supposant $-1 \leq t \leq 0$.
  Plus précisément, elle est obtenue quand $t = 2 - 2\sqrt{2}$ et elle vaut $3 - 2\sqrt{2}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.