Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.

Montrer que leur limite commune est irrationnelle.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver la condition sur les réels u_0, v_0, $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$ pour que les suites (u_n) et (v_n) définies par les récurrences $u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu}$ soient adjacentes.

Dans le cas général, les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes, et vers quelle limite ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$ est convergente et que sa limite est un irrationnel.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple $(u_0 = a > 0, v_0 = b > 0)$ et par les relations $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout n, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

– La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, et $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

– Utiliser $n(n!)u_n < n(n!)\ell < n(n!)v_n$, et en déduire que ℓ est irrationnel.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la suite $(v_n-u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique, puis que $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Etudier alors les monotonies des suites u et v.

On constate qu'elles sont adjacentes $\Leftrightarrow \mu\geq\lambda$ ou $u_0=v_0$.

On trouve alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\dfrac{(1+\lambda)u_0+\lambda(1+\mu)v_0}{1+2\lambda+\lambda\mu}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Montrer que les suites $(a_n=u_{2n})$ et $(b_n=u_{2n+1})$ sont adjacentes.

Utiliser ensuite l'encadrement $u_{2n+1}=u_{2n}-\dfrac{1}{(2n+1)!}<\ell<u_{2n}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $n\geq 1$, vérifier qu'on a : $v_n\geq u_n$.

En déduire les monotonies de (u_n) et (v_n), à partir de $n=1$.

Justifier pourquoi les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Montrer que leurs limites sont égales en utilisant les définitions des suites u et v.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Montrer que pour tout $n\geq 1$, on a $u_n\leq v_n$.

En déduire les monotonies de (u_n) et (v_n), à partir de $n=1$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, ensuite que leurs limites sont égales.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.