Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq -\frac{1}{2}$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{a}{u_n})$, où $a > 0$ est donné.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 1$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{-1+u_n}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par u_0 réel et $u_{n+1} = u_n(1+u_n)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = x + \dfrac{1+x}{1+2x}$.

La seule limite finie *possible* de la suite u est $\ell = -1$.

La discussion fait apparaître les cas $u_0 < -1$, $u_0 = -1$, $-1 < u_0 < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < u_0$.

Dans les trois premiers cas, la limite est -1. Dans le dernier, elle est égale à $+\infty$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$.

La seule limite finie *possible* est $\ell = \sqrt{a}$.

Dans tous les cas, la suite converge vers $\sqrt{a}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

La seule limite finie *possible* de la suite u est $\ell = -1$.

On étudie la suite u, suivant les valeurs de u_0.

- Si $u_0 < -1$, la suite u est croissante et majorée : elle converge $\ell = -1$.
- Si $u_0 = -1$, la suite u est constante.
- Si $-1 < u_0 < 0$, la suite u est décroissante et minorée : elle converge vers -1.
- Si $u_0 = 0$, on a $u_1 = -1$ donc...
- Si $0 < u_0 < 1$, on est donc ramené au premier cas.
- Si $u_0 > 1$, la suite u est croissante et tend vers $+\infty$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Étudier $f(x) = 2 + \ln x$, et $g(x) = f(x) - x$.

Il y a deux limites réelles *possibles* $\alpha \approx 0.1585943396$ et $\beta \approx 3.146193221$.

Discuter suivant la position de u_0 par rapport à α et β.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

La suite u est croissante. La seule limite finie *possible* est $\ell = 0$.

Discuter suivant la position de u_0 par rapport à 0 et -1.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

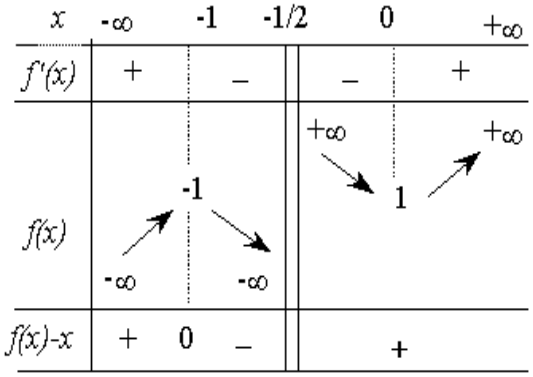
La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x + \dfrac{1+x}{1+2x}$.

On commence par étudier l'application f.

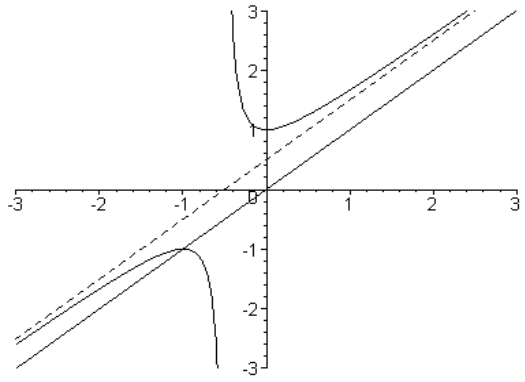
On a $f(x) = x \Leftrightarrow x = -1$: la seule limite finie *possible* de la suite u est donc $\ell = -1$.

Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, on a : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+2x)^2} = 4\dfrac{x(x+1)}{(1+2x)^2}$.

On en déduit le tableau de variations de f (avec le signe de $f(x) - x = \dfrac{1+x}{1+2x}$) :



Voici la courbe représentative de f (avec l'asymptote $y = x + \frac{1}{2}$ et la bissectrice $y = x$) :



On constate que $x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \neq -\frac{1}{2}$.

Puisque $u_0 \neq -\frac{1}{2}$, cela signifie que la suite (u_n) est entièrement définie.

On peut maintenant étudier la suite u, suivant les valeurs de u_0.

– Si $u_0 < -1$.

Pour tout $x < -1$, on a $x < f(x) < -1$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.