Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{2}}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par par $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2u_n}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \frac{1}{14}(3u_n^3 - 3u_n^2 - 4u_n)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On définit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x-4)/2 & \text{sur }]-\infty, -2] \\ 3(x+1) & \text{sur } [-2, -1] \\ 2(x+1)/3 & \text{sur } [-1, +\infty[\end{cases}$

On définit une suite (u_n) par la donnée de u_0 et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Etudier la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit a un réel strictement positif, différent de 1.
On définit une suite (u_n) de la manière suivante :

- u_0 est strictement compris entre a et 1.
- Pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + a - \frac{a}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier n, le réel u_n est strictement compris entre a et 1.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier n, u_n est défini et positif. La seule limite finie possible u est $\ell = 4$.

On discute suivant la position de u_0 par rapport à 0 et 4. Dans tous les cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Considérer $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$. La seule limite finie possible est $\ell = \dfrac{3}{2}$.

On est amené à considérer $a_n = u_{2n}$, $b_n = u_{2n+1}$, et $g = f \circ f$.

On prouve que les suites de terme général a_n et b_n sont adjacentes.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On considère $f(x) = \dfrac{1}{14}(3x^3 - 3x^2 - 4x)$, et on factorise $f(x) - x$.

Les seules limites finies *possibles* de la suite u sont -2, 0, et 3.

Des trois points fixes, seul 0 est "attractif". Les deux autres sont "répulsifs".

On discute suivant la position de u_0 par rapport à -2, 0 et 3 :

- Si $-2 < u_0 < 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $u_0 \in \{-2, 3\}$, la suite est constante.
- Si $u_0 < -2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $u_0 > 3$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'application f est affine par morceaux. Tracer $y = f(x)$, et comparer $f(x)$ à x.

Il y a trois limites finies *possibles* : -4, $-\frac{3}{2}$ et 2.

- Si $u_0 < -\frac{3}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$.
- Si $u_0 = -\frac{3}{2}$ alors la suite u est constante.
- Si $u_0 > -\frac{3}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Procéder par récurrence.
2. Les seules limites finies *possibles* de la suite u sont 1 et a.

   La suite u est croissante et bornée, donc...

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier n, il est clair que u_n est défini et positif.

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}}$.

L'application f étant paire, on peut se contenter d'étudier le cas où $u_0 \geq 0$.

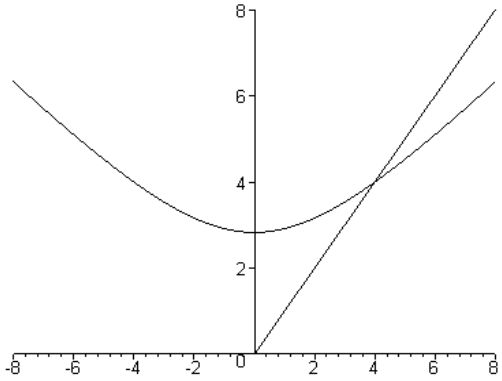
L'application f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) - x = \sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}} - x = \dfrac{1}{2}\dfrac{16 - x^2}{\sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}} + x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(4-x)(4+x)}{\sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}} + x}$.

On en déduit le signe de $f(x) - x$, et l'équivalence $f(x) = x \Leftrightarrow x = 4$.

La seule limite finie possible de la suite u est donc $\ell = 4$.

Voici la courbe $y = f(x)$, avec la bissectrice $y = x$.



On peut alors conclure suivant la valeur de u_0.

- Si $0 \leq u_0 < 4$: Pour tout x de $[0, 4[$, on a $0 \leq x < f(x) < 4$.
  En particulier $0 \leq u_0 < u_1 < 4$ et $0 \leq u_1 < u_2 < 4$.
  Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \geq 0, 0 \leq u_n < u_{n+1} < 4$.
  La suite u, croissante et majorée, converge vers 4 (seule limite possible).
- Si $u_0 = 4$: La suite u est constante : $\forall n \geq 0, u_n = 4$.
- Si $4 < u_0$: Pour tout x de $]4, +\infty[$, on a $4 < f(x) < x$.
  En particulier $4 < u_1 < u_0$ et $4 < u_2 < u_1$.
  Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \geq 0, 4 < u_{n+1} < u_n$.
  La suite u, décroissante et minorée, converge vers 4 (seule limite possible).
- Si $u_0 \leq 0$: On a alors $u_1 \geq 0$ et on est ramené aux cas précédents.
- Conclusion : Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.