Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble muni de deux lois $\star$ et $\bullet$

On suppose que e est neutre pour la loi $\star$ et que f est neutre pour la loi $\bullet$

On suppose enfin que : $\forall (x,y,u,v) \in E^4$, $(x \star y) \bullet (u \star v) = (x \bullet u) \star (y \bullet v)$

1. Montrer que $e = f$.
2. Prouver que les lois $\star$ et $\bullet$ sont identiques.
3. Montrer que cette loi est commutative et associative.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Sur $\mathbb{R}$ on définit la loi $\star$ par : $x \star y = kxy + k'(x+y)$, où k et k' sont deux réels.

A quelle condition sur k et k' cette loi est-elle associative ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la loi $\star$, définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\begin{cases} \text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } A \star B = A \cup B \\ \text{Si } A \cap B \neq \emptyset, \text{ alors } A \star B = E \end{cases}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier la loi $\star$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A \star B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition associative notée $\star$

On suppose également que E possède un neutre e pour la loi $\star$

1. Montrer que si un élément a de E est régulier (simplifiable) alors il est inversible.
2. Vérifier sur un exemple que ce n'est plus vrai si on ne suppose pas que E est fini.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Poser $x = v = e$ et $y = u = f$.
2. Poser $y = u = e$, et laisser x, v quelconques.
3. Pour l'associativité, choisir $y = e$, les trois autres étant quelconques.
   Pour la commutativité, poser $x = v = e$, les deux autres étant quelconques.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On remarque que la loi $\star$ est commutative.
La loi $\star$ est associative $\Leftrightarrow k' \in \{0, 1\}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

– La commutativité est évidente. $\emptyset$ est neutre, et il est le seul élément inversible.
– La loi $\star$ est associative (discuter selon que l'intersection de A avec B et C est vide ou non).

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– La loi $\star$ est commutative, et E est neutre.
– Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est son propre symétrique.
– On trouve $(A \star B) \star C(A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup B \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B \cup C)$.
  La loi $\star$ est associative.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que si a est régulier, les applications $\begin{cases} d_a : x \mapsto x \star a \\ g_a : x \mapsto a \star x \end{cases}$ sont bijectives.
   En déduire l'existence de a', a'' tels que $a' \star a = a \star a'' = e$, puis montrer que $a' = a''$.
2. Considérer $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.