Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $\star$, associative et commutative.

On suppose de plus que pour tout x de E, $x \star x = x$.

1. Donner des exemples d'une telle situation.
2. Montrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \star y = y$ définit une relation d'ordre sur E.
3. Montrer alors que pour tous éléments x, y de E, $\sup\{x, y\} = x \star y$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini muni d'une loi associative, notée multiplicativement.

Montrer que pour tout a de E, il existe un entier m tel que $x = a^m$ soit idempotent ($x^2 = x$).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné muni d'une loi $\star$ telle que :

$$\forall\,(a, b, x) \in E^3,\ \begin{cases} a \star b \leq a, \quad a \star b \leq b \\ (x \leq a) \text{ et } (x \leq b) \Rightarrow x \leq a \star b \end{cases}$$

1. Montrer que la loi $\star$ est commutative.
2. Prouver que pour tout a de E, $a \star a = a$.
3. Vérifier que $\begin{cases} a \leq b \Rightarrow a \star c \leq b \star c \\ (a \leq b) \text{ et } (c \leq d) \Rightarrow a \star c \leq b \star d \end{cases}$
4. Montrer que la loi $\star$ est associative.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble muni d'une loi $\star$ associative. Pour tout a de E, on définit les applications g_a et d_a de E dans E : $\forall\, x \in E$, $d_a(x) = x \star a$ et $g_a(x) = a \star x$.

1. Montrer que s'il existe a dans E tel que g_a et d_a soient surjectives, alors E possède un élément neutre pour la loi $\star$.
2. Montrer que si pour tout a de E les applications g_a et d_a sont surjectives, alors tout élément de E possède un inverse pour la loi $\star$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. $E = \mathcal{P}(F)$ avec la loi "réunion" ou la loi "intersection".
2. – La réflexivité est évidente.
   – Utiliser la commutativité de la loi $\star$ pour prouver l'antisymétrie de $\mathcal{R}$.
   – Utiliser l'associativité de la loi $\star$ pour prouver la transitivité de $\mathcal{R}$.
3. Prouver que $x \star y$ est un majorant de $\{x, y\}$.

   Enfin si z est un majorant de x et y, prouver que z est un majorant de $x \star y$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Prouver l'existence de deux entiers $p < q$ tels $a^q = a^p$.

Montrer que la suite des a^n devient périodique.

En déduire l'existence d'un entier m tel que $a^{2m} = a^m$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Pour tous a, b de E, montrer que $b \star a \leq a \star b$.

   Par un argument de symétrie, en déduire que la loi $\star$ est commutative.
2. Pour tout a de E, vérifier que $a \star a \leq a$ et $a \leq a \star a$.
3. Soient a, b, c dans E, avec $a \leq b$. Vérifier que $a \star c \leq b \star c$.
4. Soient a, b, c dans E. Vérifier que $(a \star b) \star c \leq a$ et $(a \star b) \star c \leq b$.

   En déduire $(a \star b) \star c \leq a \star (b \star c)$.

   Conclure en utilisant la commutativité de la loi $\star$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Jusitifer l'existence e, f tels que $e \star a = a$ et $a \star f = a$.

   Pour tout x de E, utiliser y, z dans E tels que $y \star a = x$ et $a \star z = x$ pour montrer que $x \star f = x$ et $e \star x = x$. Montrer que $e = f$. Ainsi e est le neutre...
2. Soit a dans E. Justifier l'existence de a', a'' tels que $a' \star a = e$ et $a \star a'' = e$.

   En déduire que $a' = a''$ est l'inverse de a.