Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient x, y deux éléments d'un groupe G tels que : $(xy)^{-1} = x^{-1}y$ et $(yx)^{-1} = y^{-1}x$.
Montrer que $(x^2)^{-1} = y^2$ et $x^4 = y^4 = e$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme $\Leftrightarrow$ la loi de G est commutative.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $(G, \star)$ un groupe abélien (on note e le neutre et a' le symétrique de a).
Soit α un élément de G, différent de e.
On définit une loi $\mathcal{T}$ en posant : $\forall\, a, b \in G,\ a\mathcal{T}b = a \star b \star \alpha$.
Montrer que $(G, \mathcal{T})$ est un groupe abélien.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $\mathbb{R}$, muni de la loi $x \star y = (x^3 + y^3)^{1/3}$ est un groupe.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que :
$\forall\, (a, b) \in G^2,\ \exists\, (x, y) \in G^2,\ b = ax = ya$.
Montrer que G est un groupe.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ associative.
On suppose que tout élément de G est régulier (simplifiable).
Montrer que G est un groupe.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.