

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi multiplicative telle que :

$$\forall a, b, c : a^2 = b^2, \quad ab^2 = a, \quad a^2(bc) = cb, \quad (ac)(bc) = ab.$$

Montrer que E est un groupe pour la loi \star définie par : $a \star b = a(b^2b)$.

Énoncer et prouver une réciproque.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On définit la loi \star sur \mathbb{R} en posant : $x \star y = x + y - xy$.

1. Étudier la loi \star . (\mathbb{R}, \star) est-il un groupe ?
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \star)$ est un groupe abélien isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times) .
3. Pour tout x de \mathbb{R} et tout n de \mathbb{N} , calculer $x^{(n)} = x \star x \star \dots \star x$ (n fois).

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que $] - 1, 1[$, muni de la loi $x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$, est un groupe abélien.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit G un groupe. On suppose que $x \mapsto x^n$ est un morphisme de G (avec $n \in \mathbb{N}$).

Montrer que pour tout x de G , x^{n-1} commute avec tous les éléments de G .

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient a et b deux éléments d'un groupe G vérifiant : $b^6 = e$, $ab = b^4a$.

Montrer que $b^3 = e$ et que $ab = ba$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Remarque : Les parenthèses sont nécessaires car on ne sait pas si la loi de E est associative.

En particulier, b^2b signifie $(bb)b$, qui peut être différent de $b(bb)$.

– Noter e l'élément tel $a^2 = e$ pour tout a .

Constater que $e^2e = e^2 = e$. En déduire $a \star e = e \star a = a$.

– Montrer que $a \star (b \star c) = a((ec)b) = (a \star b) \star c$.

– Montrer que l'inverse de a pour la loi \star est ea .

– Pour la réciproque : si (G, \star) est un groupe de neutre e , définir la loi $xy = x \star y^{-1}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Il y a un neutre, mais que dire de $x = 1$?

2. Utiliser la factorisation de $1 - \varphi(x) \star \varphi(y)$, avec l'application $\varphi : t \mapsto 1 - t$.

3. Utiliser encore l'isomorphisme φ . On trouve $x^{(n)} = 1 - (1 - x)^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Factoriser $1 - x \star y$ et $1 + x \star y$ (la suite est facile).

Il y a une autre démonstration si on connaît l'application th (tangente hyperbolique).

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Soient x, y dans G . Montrer que $x^{n-1}y = yx^{n-1}$ en utilisant z tel que $y = z^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $ab^3 = a$. On peut aussi partir de $b = a^{-1}b^4a$.