Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer qu'un groupe fini d'ordre premier est cyclique.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer qu'un groupe G dans lequel tout x vérifie $x^2 = e$ est commutatif.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer qu'un groupe G dans lequel on a toujours $(xy)^2 = x^2y^2$ est commutatif.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit G un ensemble muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que :

$$\begin{cases} \text{Il existe un élément } e \text{ de } E \text{ tel que pour tout } x,\ xe = x \\ \text{Pour tout } x \text{ de } E, \text{ il existe un élément } x' \text{ tel que } xx' = e. \end{cases}$$

Montrer que G est un groupe.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe fini dans lequel tout élément vérifie $x^2 = e$.

1. Montrer que le groupe G est abélien
2. On fixe un élément a de G, distinct du neutre e.
   Pour tout x de G, on note $\overline{x} = \{x, ax\}$.
   On définit ensuite une relation $\mathcal{R}$ sur G en posant $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \in \overline{x}$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. On note H l'ensemble des différentes classes d'équivalences $\overline{x}$, quand x parcourt G.
   Quel est le cardinal de H ?
4. Montrer qu'on définit une loi de groupe sur H en posant $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{xy}$.
   Vérifier que H satisfait à la même hypothèse que le groupe G.
5. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.