Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Montrer qu'un groupe fini d'ordre premier est cyclique.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Montrer qu'un groupe G dans lequel tout x vérifie $x^2 = e$ est commutatif.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Montrer qu'un groupe G dans lequel on a toujours $(xy)^2 = x^2y^2$ est commutatif.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit G un ensemble muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que :

$$\begin{cases} \text{Il existe un élément } e \text{ de } E \text{ tel que pour tout } x,\ xe = x \\ \text{Pour tout } x \text{ de } E, \text{ il existe un élément } x' \text{ tel que } xx' = e. \end{cases}$$

Montrer que G est un groupe.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe fini dans lequel tout élément vérifie $x^2 = e$.

1. Montrer que le groupe G est abélien
2. On fixe un élément a de G, distinct du neutre e.

   Pour tout x de G, on note $\overline{x} = \{x, ax\}$.

   On définit ensuite une relation $\mathcal{R}$ sur G en posant $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \in \overline{x}$.

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. On note H l'ensemble des différentes classes d'équivalences $\overline{x}$, quand x parcourt G.

   Quel est le cardinal de H ?
4. Montrer qu'on définit une loi de groupe sur H en posant $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{xy}$.

   Vérifier que H satisfait à la même hypothèse que le groupe G.
5. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.