Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe et H une partie non vide de G, finie et stable.
Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On considère les applications de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ dans lui-même, définies par :

$$\begin{cases} f_1(x) = x & f_2(x) = \dfrac{1}{1-x} & f_3(x) = \dfrac{x-1}{x} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x} & f_5(x) = 1 - x & f_6(x) = \dfrac{x}{x-1} \end{cases}$$

1. Montrer que ces six applications forment un groupe G pour la loi $\circ$.
2. Quels sont les sous-groupes de G ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.
Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.
On note $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$ et pareillement $KH = \{kh, k \in K, h \in H\}$.
Montrer que HK est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow HK = KH$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-groupes d'un groupe G.
On suppose que pour tous indices i et j il existe un indice k tel que $H_i \cup H_j \subset H_k$.
Montrer que $H = \bigcup H_i$ est un sous-groupe de G.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe fini d'ordre $2n$, avec $n \geq 2$.
On suppose qu'il existe deux sous-groupes H et K d'ordre n, tels que $H \cap K = \{e\}$.
Montrer que $n = 2$ et donner la table du groupe G.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout x de H, l'application $n \mapsto x^n$ ne peut pas être injective.

En déduire que e est dans H et que l'inverse de x est dans H.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Former la table des $f_i \circ f_j$.
2. Il y a un seul sous-groupe d'ordre 1, et un seul d'ordre 6.

   Il y a un seul sous-groupe d'ordre 3, et trois sous-groupes d'ordre 2.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si $H \cup K$ est un sous-groupe et si $H \not\subset K$, se donner a tel que $a \in H, a \notin K$.

Pour tout x de K, considérer alors le produit xa.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– Si HK est un sous-groupe, se donner x dans HK.

  En considérant x^{-1}, montrer que x est dans KH.

  Montrer de même l'inclusion $KH \subset HK$.

– Réciproquement si $HK = KH$, se donner $a = h_1k_1$ et $b = h_2k_2$ dans HK.

  Avec $b^{-1}a = k_2^{-1}h_2^{-1}h_1k_1$, prouver que $k_2^{-1}h_2^{-1}h_1$ est dans HK.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b dans H. Montrer qu'il existe k dans I tels que $a \in H_k$ et $b \in H_k$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Il existe a dans $G \setminus (H \cup K)$ tel que $G = H \cup K \cup \{a\}$.

Soit (x, y) dans $H \times K$ avec $x \neq y$. Prouver que $xy = yx = a$.

En déduire que $H - \{e\}$ et $K - \{e\}$ sont des singletons.

Donner alors la table du groupe G.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.