Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit A un anneau et $C = \{x \in A, \forall y \in A, xy = yx\}$ (on dit que C est le *centre* de A).
Montrer que C est un sous-anneau de A.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Dans l'anneau A, on suppose que : $\forall (a, b) \in A^2,\ (a^2 - a)b = b(a^2 - a)$.

1. Montrer que $\forall (x, y, z) \in A^3, (xy + yx)z = z(xy + yx)$.
2. Montrer que A est un anneau commutatif.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit A un anneau sans élément nilpotent (autre que 0).
Soit a un élément idempotent de A (c'est-à-dire tel que $a^2 = a$).
Montrer que a commute avec tout élément de A.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit A un anneau dans lequel, pour tout élément x, $x^2 = x$. *(Anneau de Boole)*

1. Donner des exemples d'une telle situation.
2. Montrer que pour tout a de A, $2a = 0$. En déduire que A est commutatif.
3. Montrer que A ne peut pas se réduire à trois éléments.
4. On suppose que A est fini et de cardinal supérieur à 2.
   Montrer que A possède des diviseurs de zéro.
5. Montrer que si $\mathrm{card}(A) = 4$, alors A est unique à un isomorphisme près.
6. Montrer que si A est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.