Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit A un anneau et $C = \{x \in A, \forall\, y \in A, xy = yx\}$ (on dit que C est le *centre* de A).
Montrer que C est un sous-anneau de A.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Dans l'anneau A, on suppose que : $\forall\,(a,b) \in A^2,\ (a^2-a)b = b(a^2-a)$.

1. Montrer que $\forall\,(x,y,z) \in A^3, (xy+yx)z = z(xy+yx)$.
2. Montrer que A est un anneau commutatif.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit A un anneau sans élément nilpotent (autre que 0).
Soit a un élément idempotent de A (c'est-à-dire tel que $a^2 = a$).
Montrer que a commute avec tout élément de A.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit A un anneau dans lequel, pour tout élément x, $x^2 = x$. *(Anneau de Boole)*

1. Donner des exemples d'une telle situation.
2. Montrer que pour tout a de A, $2a = 0$. En déduire que A est commutatif.
3. Montrer que A ne peut pas se réduire à trois éléments.
4. On suppose que A est fini et de cardinal supérieur à 2.
   Montrer que A possède des diviseurs de zéro.
5. Montrer que si $\mathrm{card}(A) = 4$, alors A est unique à un isomorphisme près.
6. Montrer que si A est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.