



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer qu'un anneau intègre et fini est un corps.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit x un élément nilpotent d'un anneau A .

Montrer que $1 - x$ est inversible et donner son inverse en fonction de x .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $A = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau intègre de \mathbb{R} .

Pour tout $x = a + b\sqrt{2}$ de A , on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$.

2. Montrer que pour tous x, y de A , $N(xy) = N(x)N(y)$.

3. En déduire que x est inversible dans $A \Leftrightarrow N(x) = \pm 1$.

4. Montrer que les éléments $\pm(1 + \sqrt{2})^n$ de A sont inversibles.

5. Réciproquement, on veut montrer que tout inversible x de A est de la forme précédente

(a) Montrer qu'on peut se ramener à supposer $x = a + b\sqrt{2}$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer alors que x est de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et conclure.

Indication : si $b \geq 1$, considérer $x_1 = \frac{x}{1 + \sqrt{2}}$.