Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer qu'un anneau intègre et fini est un corps.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit x un élément nilpotent d'un anneau A.
Montrer que $1-x$ est inversible et donner son inverse en fonction de x.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $A = \{a+b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau intègre de $\mathbb{R}$.
Pour tout $x = a+b\sqrt{2}$ de A, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$.
2. Montrer que pour tous x, y de A, $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. En déduire que x est inversible dans $A \Leftrightarrow N(x) = \pm 1$.
4. Montrer que les éléments $\pm(1+\sqrt{2})^n$ de A sont inversibles.
5. Réciproquement, on veut montrer que tout inversible x de A est de la forme précédente
   (a) Montrer qu'on peut se ramener à supposer $x = a+b\sqrt{2}$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer alors que x est de la forme $(1+\sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et conclure.
   Indication : si $b \geq 1$, considérer $x_1 = \dfrac{x}{1+\sqrt{2}}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.