Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

1. Trouver l'exposant dans la décomposition de 1000! en produits de facteurs premiers.
2. Généraliser avec l'exposant d'un entier premier p dans la décomposition de n!.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient m et n deux entiers naturels, avec $m < n$, et tels que $m^n = n^m$.
Montrer que nécessairement $m = 2$ et $n = 4$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Trouver tous les entiers $0 \leq n \leq m$ tels que : $\begin{cases} \text{pgcd}\,(m, n) = m - n \\ \text{ppcm}\,(m, n) = 300 \end{cases}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tous entiers m et n :
$m^2 + n^2$ est divisible par 7 $\Leftrightarrow$ m et n sont divisibles par 7.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Quel est le plus petit entier naturel admettant exactement 15 diviseurs positifs ?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Dans $\{1,\ldots,1000\}$, il y a 500 entiers pairs, 250 multiples de 4, 125 multiples de 8, etc. L'exposant de 2 dans la décomposition de 1000! est 994.
2. Soit p premier, avec $2 \leq p \leq n$. L'exposant de p dans la décomposition de $n!$ est $\sum_{k=1}^{m} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquer qu'on peut supposer $m \geq 2$. Passer aux logarithmes, et étudier $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Soit $d = \operatorname{pgcd}(m,n)$, et m', n' tels que $m = dm'$ et $n = dn'$.

Prouver que $m' = n' + 1$ et $dn'(n'+1) = 300$, et considérer les diviseurs de 300.

Parmi ces diviseurs, deux doivent être consécutifs.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Former le tableau des $k^2 \pmod 7$, avec $0 \leq k \leq 6$.

Considérer alors la valeur modulo 7 des entiers $m^2 + n^2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Calculer le nombre des diviseurs positifs d'un entier n, en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n. En déduire que la décomposition de l'entier n cherché est nécessairement de la forme $n = p^{14}$ ou $n = p^4 q^2$.