Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

1. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Soient a et b deux entiers.
   Montrer que le système $\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$ possède des solutions et que celles-ci forment une classe d'entiers modulo mn.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $N = 4k + 3$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2520x - 3960y = 6480$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $p-1$, C_p^k est divisible par p.
2. En déduire que pour tous entiers a et b, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
3. Montrer que pour tout entier n, $n^p \equiv n \pmod{p}$ (c'est le *petit théorème de Fermat.*)
4. Qu'obtient-on si p ne divise pas n ?

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tous entiers m et n, $N = mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Soient u, v dans $\mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$. Considérer $\alpha = vna + umb$.
   Prouver ensuite que les solutions sont les $x = \alpha + kmn$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Ce système n'admet aucune solution (raisonner par l'absurde.)

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, on suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers de la forme $4k + 3$.

Nommons-les $p_0 = 3 < p_1 = 7 < p_2 = 11 < p_3 = 19, < \cdots < p_n$.

Considérer alors l'entier $N_n = 4p_1p_2 \dots p_n + 3$.

Montrer que N_n est nécessairement divisible par l'un des entiers $p_0, p_1, \dots, p_n$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve $\text{pgcd}\,(3960, 2520) = 360$. L'équation équivaut à $7x - 11y = 18$.

La résoudre en utilisant une solution particulière de $7x - 11y = 1$.

Les solutions de l'équation initiale sont données par $\begin{cases} x = -54 + 11k \\ y = -36 + 7k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser $k\mathrm{C}_p^k = p\mathrm{C}_{p-1}^{k-1}$, et le théorème de Gauss.
2. Considérer la formule du binôme.
3. Utiliser une généralisation du résultat précédent.
4. Si n n'est pas un multiple de p, on trouve $n^{p-1} = 1 \pmod p$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Décomposer 56786730 en produit de facteurs premiers.

L'exercice précédent montre que pour tout p premier, $n^p - n$ et $m^p - m$ sont divisibles par p.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.