

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ de S_{12} .

1. Décomposer σ en produits de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produits de transpositions.
3. Quelle est la parité de σ ?
4. Calculer l'entier minimum n tel que $\sigma^n = \text{Id}$.
5. Calculer σ^{1999} .

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

1. A quelle condition une permutation σ commute-t-elle avec une transposition $\tau = (i, j)$?
2. En déduire que si $n \geq 3$, seule Id commute avec tous les éléments de S_n .
3. Montrer que si $n \geq 4$, seule Id commute avec toutes les permutations paires.
Indication : utiliser les cycles de longueur 3.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

1. Montrer que le groupe symétrique S_n (avec $n \geq 2$) est engendré par les transpositions $\tau_j = (j, j+1)$ avec $1 \leq j \leq n-1$.
2. Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en produit de telles transpositions.
NB : on utilisera la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.
3. Passer du mot *MERCI* au mot *CRIME* par des échanges de lettres contiguës :
 - (a) Par une méthode s'appuyant sur la question précédente.
 - (b) Par une méthode directe. En déduire une nouvelle réponse à la question (2).

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

1. On suppose $n \geq 3$ et on note c la permutation circulaire $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$
Montrer que le groupe S_n est engendré par c et par la transposition $\tau = (1, 2)$.
Indication : on utilisera le résultat de la question (1) de l'exercice précédent.
2. Application : on veut passer du mot *MERCI* au mot *CRIME* uniquement par des rotations du mot vers la droite ou des échanges des deux premières lettres.
 - (a) Donner une solution utilisant le résultat la question (2) de l'exercice précédent.
 - (b) Imaginer une solution directe, nécessitant beaucoup moins d'étapes. Commenter.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, avec $\sigma_1 = (1, 6, 11, 8, 3)$, $\sigma_2 = (2, 12, 5, 9)$, et $\sigma_3 = (4, 10, 7)$.
2. Décomposer σ_1 , σ_2 et σ_3 en produits de transpositions.
3. σ est impaire (on peut donner deux méthodes.)
4. Le plus petit entier n tel que $\sigma_n = \text{Id}$ est 60.
5. On peut écrire : $\sigma^{1999} = \sigma^{19} = \sigma_1^4 \circ \sigma_2^3 \circ \sigma_3$.

$$\text{Finalement } \sigma^{1999} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 8 & 10 & 12 & 1 & 4 & 11 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma \Leftrightarrow \{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$.
2. Si σ commute avec tous les éléments de S_n , elle commute avec les transpositions.
Considérer $\tau = (i, j)$ et $\tau' = (i, k)$, avec i, j, k dans $\{1, 2, \dots, n\}$.
3. Si σ commute avec les permutations paires, elle commute avec les cycles de longueur 3.
Considérer $c = (i, j, k)$, et x dans $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j, k\}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Il suffit de montrer que toute transposition peut s'écrire comme un produit de τ_j .
2. Décomposer σ en cycles, puis ces cycles en transpositions, puis ces transpositions...
3. La question précédente donne un résultat en 9 étapes.
Il y a une méthode directe en 7 étapes.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Il suffit de prouver que $(i, i+1)$ s'écrit en utilisant c (et ses puissances) et $\tau = (1, 2)$.
Considérer $s = c^{1-i} = c^{n+1-i}$ et calculer $s^{-1} \circ \tau \circ s$.
2. Le nombre d'étapes, si on se contente d'utiliser la question précédente, est assez important.
En revanche, il existe une méthode directe beaucoup plus rapide.