



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Décomposer en élément simples dans $\mathbb{C}(X)$: $R = \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 - j^2)^2}$

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$: $R = \frac{6}{(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3)}$

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Même question avec $R = \frac{1}{x^8 + x^4 + 1}$

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Même question avec $R = \frac{x^3 - x + 2}{(x^2 + 1)^4(x^2 + x + 1)x}$

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Même question avec $R = \frac{1}{x^5(1 - x)^5(x^2 - x + 1)}$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

La fraction R est impaire.

$$\text{On trouve } R(x) = \frac{j}{2(x-i)} + \frac{j}{2(x+i)} - \frac{j}{4(x-j)^2} - \frac{j}{2(x-j)} + \frac{j}{4(x+j)^2} - \frac{j}{2(x+j)}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{On trouve } R = \frac{1}{x+1} - \frac{3x}{x^2+x+1} + \frac{3x}{x^2+x+2} - \frac{x}{x^2+x+3}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On commence par factoriser le dénominateur :

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \text{ puis } \begin{cases} x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\ x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

La fraction R est paire. On a aussi $R(ix) = R(x)$.

$$\text{Finalement } R = \frac{1}{4(x^2 + x + 1)} + \frac{1}{4(x^2 - x + 1)} + \frac{2x\sqrt{3} + 3}{12(x^2 + x\sqrt{3} + 1)} - \frac{2x\sqrt{3} - 3}{12(x^2 - x\sqrt{3} + 1)}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{On trouve } R = \frac{2}{x} + \frac{4x+1}{x^2+x+1} + \frac{2(x-1)}{(x^2+1)^4} - \frac{x+4}{(x^2+1)^3} - \frac{5x+1}{(x^2+1)^2} - \frac{3(2x-1)}{x^2+1}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On commence par constater que $R(x) = R(1-x)$.

On est amené à utiliser le développement limité $x^5 R(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$.

Finalement :

$$R = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^4} + \frac{20}{x^3} + \frac{49}{x^2} + \frac{99}{x} + \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{6}{(1-x)^4} + \frac{20}{(1-x)^3} + \frac{49}{(1-x)^2} + \frac{99}{1-x} + \frac{1}{x^2-x+1}.$$