# Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit $r$ un réel quelconque. On définit une application $f$ par :
$f(0)=0$, $f(-1)=0$, et pour tout réel $x$ différent de 0 et de $-1$, $f(x)=x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^{r}$.
Etudier la continuité de $f$, ainsi que l'existence et la continuité de $f'$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x)=\cos x(1+\tan x\,\tan\dfrac{x}{2})$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sin\sqrt{x}}{1-\sin\sqrt{x}}}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

$f$ étant dérivable en $a$, calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(a+3h)-f^2(a-h)}{h}$

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Etudier l'application $f$ définie par $f(x)=\arctan\dfrac{x}{x+1}+\arctan\dfrac{x}{x-1}-\arctan\dfrac{1}{2x^2}$.


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

# Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

– En dehors de $x = 0$ et $x = -1$ : utiliser la dérivée logarithmique.
– Au voisinage de 0 : utiliser $\varepsilon = \pm 1$ pour que $x = \varepsilon\,|x|$.
  Considérer les cas $r > 1$, $r = 1$, $0 < r < 1$, $r = 0$ et $r < 0$.
– Au voisinage de $-1$ : considérer les mêmes cas que ci-dessus.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Développer et simplifier $f(x)$ avant de chercher à dériver.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si on note $\varepsilon = \pm 1$ le signe de $\cos\sqrt{x}$, on trouve $f'(x) = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{x}(1 - \sin\sqrt{x})}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Traiter d'abord le cas $\ell = 0$ : pour $\varepsilon > 0$, utiliser $a > 0$ tel que $x \geq a \Rightarrow |f'(x)| \leq \varepsilon$.

En déduire $|f(x)| \leq |f(a)| + \varepsilon(x - a)$ pour $x \geq a$.

Dans le cas général ($\ell$ dans $\mathbb{R}$), poser $g : x \mapsto g(x) = f(x) - \ell x$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Au voisinage de $x = 0$ on a le développement limité $f(a + x) = f(a) + xf'(a) + o(x)$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f'(x) \equiv 0$, ce qui veut dire que $f$ est constante *par intervalles*.


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.