Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}\sin x}{b + a\cos x}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \arccos \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Trouver une expression de la somme $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ et expliquer le résultat.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient $k \leq n$ dans $\mathbb{N}$. En utilisant $f_k(x) = \sum\limits_{p=1}^{n} (-1)^p p^k x^p \mathrm{C}_n^p$, calculer $A(n,k) = \sum\limits_{p=1}^{n} (-1)^p p^k \mathrm{C}_n^p$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} = 0$?

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f'(x) = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b\cos x + a}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f'(x) = \dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$ si $x < 0$ et $f'(x) = \dfrac{-2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$ si $x > 0$.

Discuter la dérivabilité en $x = 0$ suivant les valeurs de n.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Observer que $S_n(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)'$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On trouve : $\forall\, x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On en déduit $f(x) = \arcsin x$ sur $]-1, 1[$.

Ce résultat peut être obtenu en posant $\theta = \arcsin x$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $f_k(1) = A(n, k)$, et que (pour $k \in \{1, \ldots, n\}$) on a : $f_k(x) = x f'_{k-1}(x)$.

En déduire $f_k(x) = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^k (1-x)^{n-k} + o((1-x)^{n-k})$ par récurrence.

Finalement $A(n, 0) = -1$, $A(n, n) = (-1)^n n!$ et $A(n, k) = 0$ si $1 \leq k \leq n-1$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Poser $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$. On a $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Montrer par récurrence que $f_{2n}(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, et que $f_{2n+1}(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.