Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$, $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel qu'on ait l'*égalité de Taylor-Lagrange* :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(1) = 1$, $f'(0) > 0$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)\, f'(f(x)) = 1$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ est un polynôme de degré n dont toutes les racines sont distinctes et comprises entre -1 et 1.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit P un polynôme à coefficients réels.

Montrer que si toutes les racines de P sont réelles, il en est de même des racines de P'.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues, dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
2. On suppose $f(a) = g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'}{g'} = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g} = \ell$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

(Théorème de Rolle généralisé)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]a, +\infty[$, et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.

Montrer qu'il existe un point c, avec $c > a$, tel que $f'(c) = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $x \mapsto \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda$, où λ est tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $g(x) = f(f(x)) \equiv x$. Montrer que f est strictement monotone.

Prouver qu'il n'existe aucun x tel que $f(x) > x$ ou $f(x) < x$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(f(x) - f'(x))$, et appliquer le théorème de Rolle.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $U_n(x) = (x^2-1)^n$ et $Q_{n,k} = U_n^{(k)}$.

Montrer que chaque $Q_{n,k}$, avec $0 \leq k \leq n-1$ s'annule en $x = -1$ et en $x = 1$.

Prouver par récurrence que si $k \in \{0, \ldots, n\}$, $Q_{n,k}$ s'annule en au moins k points de $]-1, 1[$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Le polynôme P est scindé dans $\mathbb{R}$.

Introduire les racines distinctes $x_1 < \cdots < x_m$ de P, et leurs multiplicités $r_1, \ldots, r_m$.

Utiliser le théorème de Rolle entre les x_k successifs.

Terminer en considérant que les x_k peuvent être racines de P'.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Considérer la fonction $h : x \mapsto (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$.
2. Conséquence immédiate de la question précédente.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Si f est constante, c'est évident, sinon considérer $b > a$ tel $f(b) \neq f(a)$.

Se donner un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$ et sur $[b, \infty[$.

Terminer avec le théorème de Rolle.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.