Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$, $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel qu'on ait l'*égalité de Taylor-Lagrange* :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(1) = 1$, $f'(0) > 0$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)\, f'(f(x)) = 1$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Montrer que la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ est un polynôme de degré n dont toutes les racines sont distinctes et comprises entre -1 et 1.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit P un polynôme à coefficients réels.

Montrer que si toutes les racines de P sont réelles, il en est de même des racines de P'.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues, dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
2. On suppose $f(a) = g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'}{g'} = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g} = \ell$.

EXERCICE 7 [Indication] [Correction]

(Théorème de Rolle généralisé)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]a, +\infty[$, et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.

Montrer qu'il existe un point c, avec $c > a$, tel que $f'(c) = 0$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $x \mapsto \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda$, où λ est tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $g(x) = f(f(x)) \equiv x$. Montrer que f est strictement monotone.

Prouver qu'il n'existe aucun x tel que $f(x) > x$ ou $f(x) < x$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(f(x) - f'(x))$, et appliquer le théorème de Rolle.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $U_n(x) = (x^2 - 1)^n$ et $Q_{n,k} = U_n^{(k)}$.

Montrer que chaque $Q_{n,k}$, avec $0 \leq k \leq n-1$ s'annule en $x = -1$ et en $x = 1$.

Prouver par récurrence que si $k \in \{0, \ldots, n\}$, $Q_{n,k}$ s'annule en au moins k points de $]-1, 1[$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Le polynôme P est scindé dans $\mathbb{R}$.

Introduire les racines distinctes $x_1 < \cdots < x_m$ de P, et leurs multiplicités $r_1, \ldots, r_m$.

Utiliser le théorème de Rolle entre les x_k successifs.

Terminer en considérant que les x_k peuvent être racines de P'.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Considérer la fonction $h : x \mapsto (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$.
2. Conséquence immédiate de la question précédente.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Si f est constante, c'est évident, sinon considérer $b > a$ tel $f(b) \neq f(a)$.

Se donner un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$ et sur $[b, \infty[$.

Terminer avec le théorème de Rolle.