

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^n$ ,  $n + 1$  fois dérivable sur  $[a, b]$ .

Montrer qu'il existe  $c$  dans  $]a, b[$  tel qu'on ait l'égalité de Taylor-Lagrange :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)$$

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Trouver  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable, telle que  $f(1) = 1$ ,  $f'(0) > 0$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) f'(f(x)) = 1$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fois dérivable et telle que  $f(a) = f'(a)$  et  $f(b) = f'(b)$ .

Montrer qu'il existe un élément  $c$  de  $]a, b[$  tel que  $f(c) = f''(c)$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que la dérivée d'ordre  $n$  de  $(x^2 - 1)^n$  est un polynôme de degré  $n$  dont toutes les racines sont distinctes et comprises entre  $-1$  et  $1$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels.

Montrer que si toutes les racines de  $P$  sont réelles, il en est de même des racines de  $P'$ .

**EXERCICE 6** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications continues, dérivables sur  $]a, b[$ .

1. Montrer qu'il existe  $c$  dans  $]a, b[$  tel que  $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$ .
2. On suppose  $f(a) = g(a) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'} = \ell$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \ell$ .

**EXERCICE 7** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

(Théorème de Rolle généralisé)

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, dérivable sur  $]a, +\infty[$ , et telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$ .

Montrer qu'il existe un point  $c$ , avec  $c > a$ , tel que  $f'(c) = 0$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser  $x \mapsto \varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda$ , où  $\lambda$  est tel que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que  $g(x) = f(f(x)) \equiv x$ . Montrer que  $f$  est strictement monotone.

Prouver qu'il n'existe aucun  $x$  tel que  $f(x) > x$  ou  $f(x) < x$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer  $g$  définie sur  $[a, b]$  par  $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$ , et appliquer le théorème de Rolle.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Poser  $U_n(x) = (x^2 - 1)^n$  et  $Q_{n,k} = U_n^{(k)}$ .

Montrer que chaque  $Q_{n,k}$ , avec  $0 \leq k \leq n - 1$  s'annule en  $x = -1$  et en  $x = 1$ .

Prouver par récurrence que si  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $Q_{n,k}$  s'annule en au moins  $k$  points de  $] -1, 1[$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Le polynôme  $P$  est scindé dans  $\mathbb{R}$ .

Introduire les racines distinctes  $x_1 < \dots < x_m$  de  $P$ , et leurs multiplicités  $r_1, \dots, r_m$ .

Utiliser le théorème de Rolle entre les  $x_k$  successifs.

Terminer en considérant que les  $x_k$  peuvent être racines de  $P'$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Considérer la fonction  $h : x \mapsto (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$ .
2. Conséquence immédiate de la question précédente.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Si  $f$  est constante, c'est évident, sinon considérer  $b > a$  tel  $f(b) \neq f(a)$ .

Se donner un réel strictement compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur  $[a, b]$  et sur  $[b, \infty[$ .

Terminer avec le théorème de Rolle.