Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Appliquer la formule des accroissements finis à $f(x) = ax^2 + bx + c$ entre x_0 et $x_0 + h$.

Que remarque-t-on ? Interprétation géométrique ?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application deux fois dérivable sur $[x_0, x_0 + 2h]$.

Montrer qu'il existe θ dans $]0, 1[$ tel que $f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = h^2 f''(x_0 + 2\theta h)$.

(On donnera deux démonstrations de ce résultat.)

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Théorème de Darboux

Soit f une application dérivable sur $[a, b]$.

Montrer que f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application dérivable de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout x de $]0, 1[$, $|f'(x)| \leq M$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Appliquer la formule des accroissements finis à $f(x) = \arctan x$ entre 0 et h.

Montrer qu'il existe un unique θ tel que $f(h) = hf'(\theta h)$. Calculer θ et $\lim_{h \to 0} \theta$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On constate que $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\frac{h}{2})$.

Soient A, B deux points d'une parabole $\mathcal{P}$, et soit C le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse médiane.

Alors la tangente à $\mathcal{P}$ en C est parallèle à la corde $[AB]$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode :

  Considérer l'application φ définie sur $[x_0, x_0+h]$ par $\varphi(t)=f(t+h)-f(t)$.

  Appliquer deux fois l'égalité des accroissements finis.

- Deuxième méthode :

  Considérer l'application $\psi : t \mapsto \psi(t)=f(x_0+2t)-2f(x_0+t)+f(x_0)-\lambda t^2$.

  Choisir λ pour que $\psi(h)=0$. Appliquer Rolle puis les accroissements finis.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer les fonctions $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\psi(x)=\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

Prolonger ces fonctions par continuité sur le segment $[a,b]$.

Utiliser le fait que $[f'(a), f'(b)]$ est inclus dans la réunion $[\varphi(a),\varphi(b)]\cup[\psi(a),\psi(b)]$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de prouver la propriété en 0.

Se donner une suite (x_n) de $]0,1[$ qui converge vers 0.

Montrer que la suite $(f(x_n))$ est également convergente : notons ℓ sa limite.

Montrer que ℓ ne dépend pas de la suite (x_n) initiale.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f(h)=hf'(\theta h)$ avec $\theta=\sqrt{\dfrac{h-\arctan h}{h^2\arctan h}}$. On vérifie que $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.