

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Appliquer la formule des accroissements finis à  $f(x) = ax^2 + bx + c$  entre  $x_0$  et  $x_0 + h$ .

Que remarque-t-on ? Interprétation géométrique ?

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application deux fois dérivable sur  $[x_0, x_0 + 2h]$ .

Montrer qu'il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que  $f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = h^2 f''(x_0 + 2\theta h)$ .

(On donnera deux démonstrations de ce résultat.)

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

*Théorème de Darboux*

Soit  $f$  une application dérivable sur  $[a, b]$ .

Montrer que  $f'$  prend toutes les valeurs comprises entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ .

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application dérivable de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que pour tout  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $|f'(x)| \leq M$ .

Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Appliquer la formule des accroissements finis à  $f(x) = \arctan x$  entre 0 et  $h$ .

Montrer qu'il existe un unique  $\theta$  tel que  $f(h) = hf'(\theta h)$ . Calculer  $\theta$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On constate que  $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \frac{h}{2})$ .

Soient  $A, B$  deux points d'une parabole  $\mathcal{P}$ , et soit  $C$  le point de  $\mathcal{P}$  d'abscisse médiane. Alors la tangente à  $\mathcal{P}$  en  $C$  est parallèle à la corde  $[AB]$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode :

Considérer l'application  $\varphi$  définie sur  $[x_0, x_0 + h]$  par  $\varphi(t) = f(t + h) - f(t)$ .

Appliquer deux fois l'égalité des accroissements finis.

– Deuxième méthode :

Considérer l'application  $\psi : t \mapsto \psi(t) = f(x_0 + 2t) - 2f(x_0 + t) + f(x_0) - \lambda t^2$ .

Choisir  $\lambda$  pour que  $\psi(h) = 0$ . Appliquer Rolle puis les accroissements finis.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer les fonctions  $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  et  $\psi(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ .

Prolonger ces fonctions par continuité sur le segment  $[a, b]$ .

Utiliser le fait que  $[f'(a), f'(b)]$  est inclus dans la réunion  $[\varphi(a), \varphi(b)] \cup [\psi(a), \psi(b)]$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de prouver la propriété en 0.

Se donner une suite  $(x_n)$  de  $]0, 1[$  qui converge vers 0.

Montrer que la suite  $(f(x_n))$  est également convergente : notons  $\ell$  sa limite.

Montrer que  $\ell$  ne dépend pas de la suite  $(x_n)$  initiale.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On trouve  $f(h) = hf'(\theta h)$  avec  $\theta = \sqrt{\frac{h - \arctan h}{h^2 \arctan h}}$ . On vérifie que  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .