Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[a,b]$, deux fois dérivable sur $]a,b[$.
Montrer que pour tout x de $[a,b]$, il existe un c de $]a,b[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application trois fois dérivable sur $[a,b]$.
Montrer $\exists\, c \in]\,a,b\,[\ ,\ f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left[f'(a)+f'(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12}f'''(c)$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application dérivable sur $[a,b]$, telle que $f'(a) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe un réel c de $]a,b]$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,2]$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.
Montrer que pour x de $[0,2]$, il existe c dans $]0,2[$ tel que $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}f'''(c)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit g une application impaire et cinq fois dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un réel c de $]0,1[$ tel que : $g(1) = \frac{1}{3}(g'(1)+2g'(0)) - \frac{1}{180}g^{(5)}(c)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

C'est évident si $x = a$ ou $x = b$. On suppose donc $x \notin \{a, b\}$.

Considérer $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(t) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) - \dfrac{(t - a)(t - b)}{2}\lambda$.

On choisit λ pour que $\varphi(x) = 0$. Appliquer deux fois Rolle à φ, puis une fois à φ'.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Définir l'application $g : x \mapsto g(x)f(x) - f(a) - \dfrac{x - a}{2}(f'(a) + f'(x)) + \lambda(x - a)^3$.

Choisir λ pour que $g(b) = 0$. Calculer g' et g''.

Appliquer deux fois Rolle, pour trouver c dans $]a, d[$ tel que $g''(c) = 0$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer l'application définie sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Vérifier que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, et que $\varphi'(a) = \varphi'(b)$.

Traiter le cas particulier $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$.

Dans le cas général, prouver qu'il existe x_0 dans $]a, b[$ tel que $\varphi(x_0) = 0$.

Terminer en appliquant Rolle à l'application $x \mapsto \psi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

C'est évident si $x \in \{0, 1, 2\}$. On fixe donc x, distinct de $0, 1, 2$.

Considérer $\varphi : t \mapsto f(t) - \dfrac{t(t - 1)(t - 2)}{6}\lambda$, où λ est tel que $\varphi(x) = 0$.

Appliquer plusieurs fois le thórème de Rolle.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\varphi(x) = g(x) - \dfrac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) + \lambda x^5$, avec λ tel que $\varphi(1) = 0$.

Constater que $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(3)}(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0$ et appliquer Rolle plusieurs fois.

Prouver l'existence de c_3 dans $]0, 1[$ tel que $\varphi^{(3)}(c_3) = 0$.

Appliquer l'égalité des accroissements finis à $g^{(4)}$ entre 0 et c_3.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.