

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  et telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq M_0$  et  $|f''(x)| \leq M_2$ .  
Montrer que, pour tout  $x$ ,  $|f'(x)| \leq M_1$  avec  $M_1 = \sqrt{2M_0M_2}$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \sin \frac{p}{n^2}$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $a$ , avec  $f''(a) \neq 0$ .

Les accroissements finis donnent  $f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta_h h)$ . Montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{2}$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un voisinage de  $a$ .

Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .

On suppose qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq n!\lambda^n$ .

Montrer que  $f$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$ .