Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : I \to J$ convexe et strictement monotone. Étudier la convexité de $f^{-1} : J \to I$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes, g étant croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ convexes. Les applications $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont-elles convexes ?

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\ln(f)$ convexe$\Rightarrow f$ convexe. Réciproque ?

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction majorée de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose l'existence d'un réel $a > 0$ tel que : $\forall\, x \geq 0,\ f''(x) \geq af(x) \geq 0$.

1. Montrer que f est décroissante.
2. Quelle est la limite de f' en $+\infty$?
3. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.
4. Montrer que $\forall\, x \geq 0,\ f(x) \leq f(0)\ \mathrm{e}^{-x\sqrt{a}}$.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et majorée, alors elle est constante.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Si f est strictement croissante convexe, alors f^{-1} est concave.

Si f est strictement décroissante convexe, alors f^{-1} est convexe.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la convexité de f, puis la croissance de g, puis la convexité de g.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

L'application $\sup(f, g)$ est convexe.

Cela n'est pas vrai en général pour $\inf(f, g)$: exemple $f(x) \equiv 0$ et $g(x) \equiv x$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Cela résulte de l'exercice précédent. La réciproque est fausse (considérer $f : x \mapsto x$.)

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. L'application f est convexe sur $\mathbb{R}^+$, donc $f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$ pour tous a, x.
   En déduire que f est décroissante.
2. Justifier l'existence de $\alpha \leq 0$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \alpha$.
   Supposer $\alpha < 0$ et aboutir à une contradiction.
3. Justifier l'existence de $\beta \geq 0$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$.
   Supposer $\beta > 0$ et aboutir à une contradiction.
4. Pour tout $x \geq 0$, poser $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{x\sqrt{a}}$.
   Vérifier que g satisfait à des hypothèses analogues à celles de f.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Supposer qu'il existe a, b dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$.

Justifier que pour tout $x > b$, on a $f(x) \geq \alpha(x-a) + f(a)$, avec $\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Montrer également que $x < a \Rightarrow f(x) \geq \alpha(x-a) + f(a)$.

Discuter enfin suivant le signe de α.