Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E l'ensemble des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour toute application f de E, on pose $I(f)=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour toute f dans E, $I(f)\geq (b-a)^2$. Quand y-a-t-il égalité ?
2. Montrer plus précisément que $\{I(f), f\in E\}=[(b-a)^2,+\infty[$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application $[a,b]\to\mathbb{R}$, continue, telle que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Montrer que f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et telle que $f(a)=f(b)=0$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $x>a>\mathrm{e}^2\Rightarrow\displaystyle\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}<\frac{2x}{\ln x}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x>\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue et positive sur $[a,b]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{I_n}=\max_{x\in[a,b]}f(x)$, avec $I_n=\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité $\Leftrightarrow$ f est constante.
2. Considérer les applications $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$, avec $\lambda > 0$.

   Vérifier que $I(f_\lambda) = (b-a)^2\varphi^2\left(\frac{(b-a)\lambda}{2}\right)$, avec $\varphi(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$, et étudier la fonction φ.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Noter $\varepsilon = \pm 1$ selon le signe de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, et utiliser la continuité de $x \mapsto |f(x)| - \varepsilon f(x)$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, puis utiliser Cauchy-Schwarz pour majorer $f^2(x)$.

En notant $c = \dfrac{a+b}{2}$, en déduire une majoration de $\displaystyle\int_a^c f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Effectuer le même travail, mais à partir de b et sur le segment $[c, b]$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{2x}{\ln x} - \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est croissante sur $[a, +\infty[$, et que $f(a) > 0$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser le changement de variable $t = \pi - x$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Étudier ensuite l'application $x \mapsto \varphi(x) = \dfrac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Se donner $\varepsilon > 0$. Observer qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{I_n} \leq M + \varepsilon$, où $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Se placer ensuite sur un sous-segment sur lequel $f(x) \geq M - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.