Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que $f(1)=0$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f'(1)$ (on pourra utiliser l'exercice précédent.)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Pour tout entier n, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Pour tout entier n, calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^{2n} x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

On pose $I_n^m = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$, où m et n sont deux entiers naturels.

1. Trouver une relation entre I_n^m et I_{n-1}^{m+1}. En déduire I_n^m.
2. Calculer $J_n^m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$
3. En déduire $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Prouver que la suite (I_n) est constante, de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On note I_n l'intégrale de l'exercice précédent. Montrer $J_{n+1} - J_n = I_n$, puis $J_n = n\dfrac{\pi}{2}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer $u_n = (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x$.

Fixer $a \in [0,1]$ et découper en deux intégrales, l'une sur $[0,a]$, l'autre sur $[a,1]$.

Avec $\varepsilon > 0$ donné, choisir a pour que $a \leq x \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$.

En déduire $|u_n| \leq 2Ma^{n+1} + \varepsilon$, avec $M = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Intégrer $v_n = (n+2)(n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ par parties, et utiliser l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On intègre par parties. On trouve $I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$ puis $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Poser $t = \pi - x$. En déduire $J_n = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$.

Si I_n est l'intégrale de l'exercice précédent, prouver $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t = 2I_n$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

1. Répéter une intégration par parties. On trouve $I_n^m = \dfrac{n}{m+1} I_{n-1}^{m+1}$ puis $I_m^n = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.
2. Poser $x = \sin^2 t$. On trouve $I_n^m = 2J_n^m$ donc $J_n^m = \dfrac{1}{2}\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.
3. Avec $m = n$, on trouve $J_n^n = \dfrac{1}{2^{2n+2}}\displaystyle\int_0^\pi (\sin x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$.

   Poser $x = \pi - t$ pour obtenir $J_n^n = \dfrac{1}{2^{2n+1}} K_n$ donc $K_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.