Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[0,1]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que $f(1)=0$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f'(1)$ (on pourra utiliser l'exercice précédent.)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Pour tout entier n, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Pour tout entier n, calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^{2n} x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

On pose $I_n^m = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$, où m et n sont deux entiers naturels.

1. Trouver une relation entre I_n^m et I_{n-1}^{m+1}. En déduire I_n^m.
2. Calculer $J_n^m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$
3. En déduire $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Prouver que la suite (I_n) est constante, de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On note I_n l'intégrale de l'exercice précédent. Montrer $J_{n+1} - J_n = I_n$, puis $J_n = n\dfrac{\pi}{2}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer $u_n = (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x$.

Fixer $a \in [0,1]$ et découper en deux intégrales, l'une sur $[0,a]$, l'autre sur $[a,1]$.

Avec $\varepsilon > 0$ donné, choisir a pour que $a \leq x \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$.

En déduire $|u_n| \leq 2Ma^{n+1} + \varepsilon$, avec $M = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Intégrer $v_n = (n+2)(n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ par parties, et utiliser l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On intègre par parties. On trouve $I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$ puis $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Poser $t = \pi - x$. En déduire $J_n = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$.

Si I_n est l'intégrale de l'exercice précédent, prouver $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t = 2I_n$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

1. Répéter une intégration par parties. On trouve $I_n^m = \dfrac{n}{m+1} I_{n-1}^{m+1}$ puis $I_m^n = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.
2. Poser $x = \sin^2 t$. On trouve $I_n^m = 2J_n^m$ donc $J_n^m = \dfrac{1}{2}\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.
3. Avec $m = n$, on trouve $J_n^n = \dfrac{1}{2^{2n+2}}\displaystyle\int_0^\pi (\sin x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$.

   Poser $x = \pi - t$ pour obtenir $J_n^n = \dfrac{1}{2^{2n+1}} K_n$ donc $K_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.