Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, \mathrm{d}x = 0$.

On supposera d'abord que f est une fonction caractéristique, puis que f est en escaliers.

Comment simplifier la démonstration si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. Prouver $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) |\sin \lambda x| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Même indication que dans l'exercice précédent.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $I_{\lambda,n} = \int_0^1 x^\lambda \ln^n x \, \mathrm{d}x$ $(\lambda > 0,\ n \in \mathbb{N})$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \, \mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}$ (avec $0 < a < b$).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. ◇ Si f est une fonction caractéristique, montrer que $\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{2}{\lambda}$.
   ◇ Si f est en escaliers, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.
   ◇ Supposer que f soit continue par morceaux, et se donner $\varepsilon > 0$.
   Il existe une application φ, en escaliers et telle que $\sup_{[a,b]} |f(x)-\varphi(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
   En déduire $\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right|$ et conclure.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

◇ Supposer que f est la fonction caractéristique de $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.
Considérer l'entier p minimum tel que $\lambda\alpha \leq p\pi$ et l'entier q maximum tel que $q\pi \leq \lambda\beta$.
Prouver que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,|\sin\lambda x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\alpha}^{p\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_{q\pi}^{\lambda\beta} |\sin t|\,\mathrm{d}t$.
Montrer qu'il suffit de vérifier que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Observer pour cela que $\displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2\frac{q-p}{\lambda}$.
◇ Généraliser par linéarité aux fonctions en escaliers.
◇ Si f est continue par morceaux, l'approcher par φ en escaliers.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

En intégrant par parties, obtenir $I_{\lambda,n} = -\dfrac{n}{\lambda+1} I_{\lambda,n-1}$, puis $I_{\lambda,n} = (-1)^n \dfrac{n!}{(\lambda+1)^{n+1}}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Constater que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \ln\frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour obtenir $\left|\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{(b^2-a^2)x^2}{12}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.